МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачёва»

Факультет фундаментальной подготовки

Кафедра физики

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

НАПРЯЖЁННОСТЬ. ПОТЕНЦИАЛ

Методические указания к практическим занятиям
по курсу физики для обучающихся всех специальностей
и направлений бакалавриата всех форм обучения

Составители С. А. Шепелева
И. В. Цвеклинская

Утверждены на заседании кафедры
Протокол № 6 от 31.01.2019

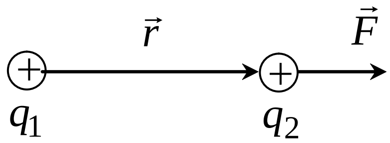
Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
направления 43.03.01
Протокол № 8 от 12.03.2019

Электронная копия находится
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2019

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Закон Кулона



$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1)$$

где $\vec{F}$ – сила взаимодействия между точечными зарядами q_1 и q_2; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый от заряда q_1 к заряду q_2; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная, равная

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м};\ 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

2. Напряжённость $\vec{E}$ электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \qquad (2)$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на пробный положительный заряд q_0, внесённый в данную точку поля.

Модуль вектора напряжённости электрического поля, созданного точечным зарядом q, находится по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}. \qquad (3)$$

Напряжённость электрического поля, созданного системой точечных зарядов, рассчитывается по принципу суперпозиции, согласно которому

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (4)$$

где $\vec{E}_i$ – напряжённость электрического поля, созданного i-м зарядом.

Принцип суперпозиции применяется и при расчёте напряжённости поля, созданного зарядами, распределенными непрерывно на теле. При этом всё тело разбивается на элементарно малые области, несущие заряд $\mathrm{d}q$. Величина напряжённости электрического поля, создаваемого зарядом $\mathrm{d}q$,

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2).$$

Напряжённость электрического поля от всего заряженного тела находится интегрированием

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}. \tag{5}$$

Распределение заряда на телах характеризуется линейной (τ), поверхностной (σ) или объемной (ρ) плотностью заряда:

$$\tau = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}; \qquad \sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}; \qquad \rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}, \tag{6}$$

которые позволяют выразить заряд $\mathrm{d}q$.

В случаях, когда заряженное тело обладает осевой или сферической симметрией, расчет напряжённости поля может быть выполнен с помощью теоремы Остроградского – Гаусса.

3. Теорема Остроградского – Гаусса

Электрическое поле графически изображается с помощью силовых линий (линий напряжённости). Густота линий напряжённости соответствует численному значению вектора $\vec{E}$. Число линий напряжённости через произвольную поверхность, помещённую в электрическое поле, называется потоком Φ_E вектора напряжённости, который рассчитывается по формуле

$$\Phi_E = \int_S E\mathrm{d}S\cos\alpha = \int_S E_n \mathrm{d}S, \tag{7}$$

где $\mathrm{d}S$ – элементарная площадка на поверхности S; n – нормаль к площадке; α – угол между $\vec{E}$ и $\vec{n}$; $E_n = E\cos\alpha$ – проекция вектора напряжённости $\vec{E}$ на направление нормали к поверхности.

По теореме Остроградского – Гаусса поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности, поделенной на $\varepsilon\varepsilon_0$:

$$\int_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (8)$$

Пользуясь теоремой Остроградского – Гаусса (или принципом суперпозиции), получают следующие выражения для напряжённости поля, созданного:

а) бесконечно длинной равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда τ

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0}, \quad (9)$$

где r_0 – расстояние нити до точки, в которой рассчитывается напряжённость E электрического поля;

б) бесконечно протяжённой равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью σ

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}; \quad (10)$$

в) заряженным металлическим шаром радиусом R вне его $(r \geq R)$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \quad (11)$$

где r – расстояние от центра шара до искомой точки. Внутри шара $(r < R)$ $E = 0$;

г) шаром из диэлектрика, заряженным с объёмной плотностью заряда ρ вне его $(r \geq R)$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}; \quad (12)$$

внутри шара $(r < R)$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (13)$$

4. Потенциал φ электростатического поля равен

$$\varphi = \frac{W}{q_0},$$

где W – потенциальная энергия точечного положительного заряда q_0, внесённого в данную точку поля.

Потенциал электрического поля, созданного точечным зарядом q на расстоянии r от него, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \tag{14}$$

при условии, что потенциал поля в бесконечно удалённой точке равен нулю.

Потенциал электрического поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\,. \tag{15}$$

При непрерывном распределении зарядов на теле потенциал поля, созданного этими зарядами, равен

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi. \tag{16}$$

5. Связь потенциала с напряжённостью электрического поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\vec{\varphi} \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Знак «–» означает, что вектор $\vec{E}$ направлен в сторону максимального убывания потенциала.

В случае однородного электрического поля

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/\,d\,, \tag{17}$$

где d – расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами φ_1 и φ_2.

Если электрическое поле обладает центральной или осевой симметрией, то

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \tag{18}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Два точечных заряда $9q$ и $-q$ закреплены на расстоянии $\ell = 50$ см друг от друга. Третий заряд $+Q$ может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда Q, при котором он будет находиться в равновесии.

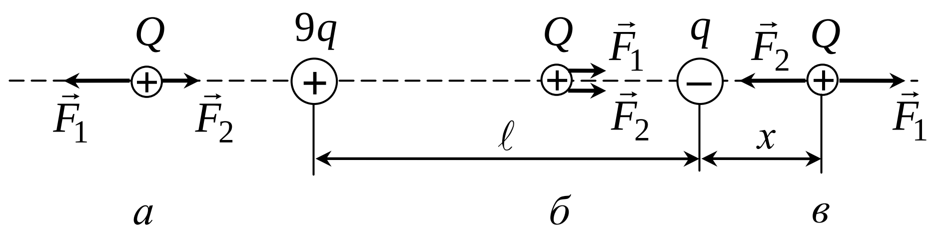


Рис. 1

Решение. Заряд Q находится в равновесии, если геометрическая сумма сил, действующих на него со стороны зарядов $9q$ и $-q$, равна нулю. Из рис. 1 видно, что в положениях *а* и *б* заряд Q не может находиться в равновесии. В положении *в* равновесие возможно, т. е.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

По закону Кулона (1)

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{9q\cdot Q}{(\ell + x)^2}, \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot Q}{x^2}.$$

Приравнивая правые части, получаем

$$9q\cdot Q/(\ell + x)^2 = q\cdot Q/x^2 \quad \text{или} \quad \ell + x = \pm 3x,$$

откуда $x_1 = +\ell/2$, $x_2 = -\ell/4$. Корень x_2 не удовлетворяет физическому условию задачи (в этой точке силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, хотя и равны по модулю, но сонаправлены).

Задача 2. Три точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

Решение. Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях, поэтому достаточно рассмотреть условие равновесия какого-либо одного заряда, например q_1. Геометрическая сумма сил, действующих, на него со стороны зарядов q_2, q_3 и q_4, должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0.$$

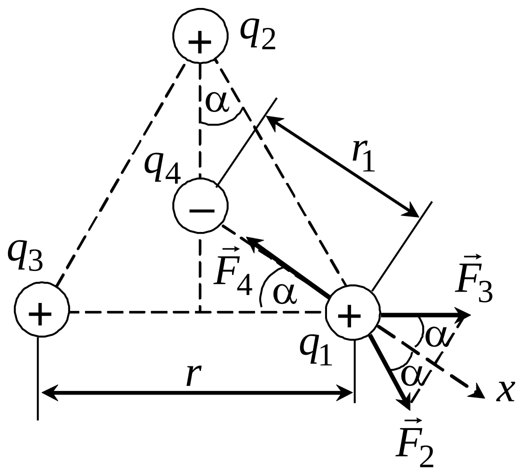


Рис. 2

Или алгебраическая сумма проекций сил на любую ось равна нулю. Проведем ось x (начало в точке, где находится заряд q_1), как показано на рис. 2.

$$F_{4x} = -\left|\vec{F}_4\right|, \quad F_{3x} = \left|\vec{F}_3\right|\cos\alpha, \quad F_{2x} = \left|\vec{F}_2\right|\cos\alpha.$$

Так как $\left|\vec{F}_3\right| = \left|\vec{F}_2\right|$, то условие равновесия имеет вид

$$2F_3\cos\alpha = F_4.$$

Применим закон Кулона

$$2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_4}{r_1^2}.$$

Учитывая, что $r_1 = \dfrac{r}{2\cos\alpha}$, $\alpha = 30^\circ$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, получаем $q_4 = \dfrac{q_3}{\sqrt{3}}$. $\quad q_4 = 10^{-9}/\sqrt{3} = 5{,}77 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Задача 3. Два маленьких шарика подвешены на длинных непроводящих нитях к одному крючку. Шарики заряжены одинаковыми зарядами и находятся на расстоянии 0,05 м друг от друга. Что произойдет, если один из шариков разрядить?

Решение. Так как массы и заряды шариков одинаковы, то рассматриваемая система симметрична относительно вертикали *CB*, поэтому можно рассмотреть условие равновесия лишь для одного шарика (рис. 3). На шарик действуют силы тяжести $m\vec{g}$, натяжения нити $\vec{T}$ и кулоновского взаимодействия $\vec{F}_к$. Для состояния равновесия результирующая всех сил, действующих на заряд, равна нулю

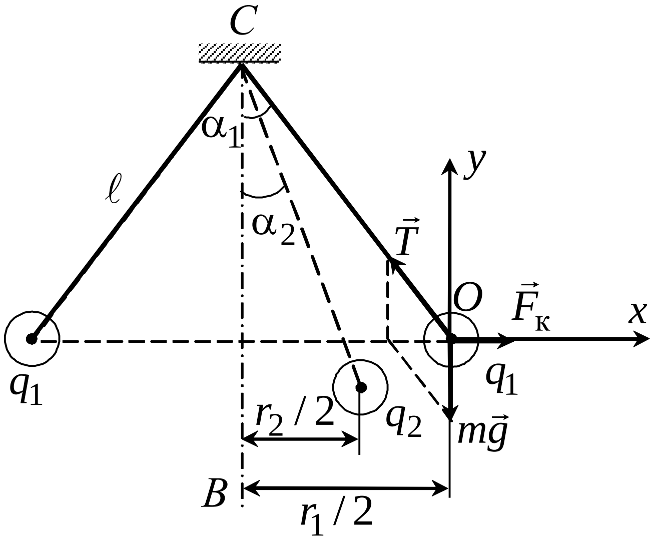


Рис. 3

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_к = 0.$$

Спроецируем векторы сил на оси *Ox* и *Oy*:

$$\left.\begin{aligned} F_к - T\sin\alpha_1 = 0 \\ -mg + T\cos\alpha_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_к}{mg} = \mathrm{tg}\alpha_1.$$

Учитывая, что $F_к = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1^2}{r_1^2}$, получим $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1^2}{r_1^2 mg} = \mathrm{tg}\alpha_1$.

По условию задачи $\ell >> r$, поэтому

$$\mathrm{tg}\alpha_1 \approx \frac{r_1}{2\ell}; \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1^2}{r_1^2 mg} = \frac{r_1}{2\ell}. \tag{20}$$

Разрядим один шарик, тогда равновесие нарушится и под действием силы тяжести шарики сблизятся до соприкосновения. Избыточный свободный заряд, находящийся на поверхности второго шарика, перераспределится между шариками поровну. Шарики оттолкнутся, система опять придет в равновесие. Так как заряды шариков уменьшились ($q_2 = q_1/2$), то угол $2\alpha_2$, на который разойдутся шарики, будет меньше $2\alpha_1$. Как и ранее $\operatorname{tg}\alpha_2 = r_2/(2\ell)$, где r_2 – новое расстояние между шариками.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2^2}{r_2^2 mg} = \frac{r_2}{2\ell}. \qquad (21)$$

Учитывая, что $q_2 = q_1/2$, из равенств (20) и (21) получим

$$\frac{4r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{r_1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Таким образом, расстояние между шариками уменьшится в $\sqrt[3]{4}$ раз.

$r_2 = 0{,}05/\sqrt[3]{4} = 3{,}15\cdot 10^{-2}$ м.

Задача 4. Тонкий стержень длиной $L = 30$ см несёт равномерно распределённый по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r_0 = 20$ см от стержня находится заряд $q_1 = 10^{-2}$ мкКл, равноудалённый от концов стержня. Определить силу взаимодействия заряда q_1 с заряженным стержнем.

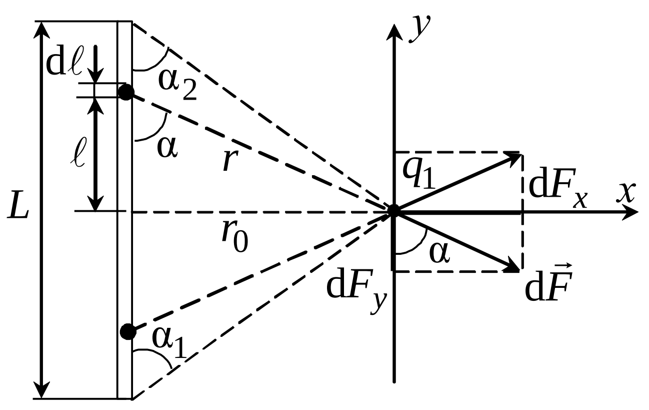


Рис. 4

Решение. Закон Кулона позволяет вычислять силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи заряд q_1 взаимодействует с зарядом, равномерно распределённым по длине стержня, который не является точечным зарядом. Однако, если выделить на стержне дифференциально малый участок длиной $\mathrm{d}\ell$, то находящийся на нем заряд $\mathrm{d}q = \tau \mathrm{d}\ell$ можно рассматривать как точечный, и по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q_1 и $\mathrm{d}q$ равна

$$\mathrm{d}F = \frac{q_1 \tau \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{22}$$

где r – расстояние от выделенного элемента $\mathrm{d}\ell$ до заряда q_1.

Из рис. 4 следует, что

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha}, \quad \ell = r_0 \operatorname{ctg}\alpha, \quad \mathrm{d}\ell = -\frac{r_0 \mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{23}$$

Разложим силу $\mathrm{d}\vec{F}$ на составляющие $\mathrm{d}\vec{F}_x$ и $\mathrm{d}\vec{F}_y$. В силу симметрии расположения заряда q_1 относительно стержня алгебраическая сумма всех составляющих $\mathrm{d}F_y$ равна нулю:

$$\int \mathrm{d}F_y = 0.$$

Поэтому модуль результирующей силы взаимодействия равен

$$F = \int \mathrm{d}F_x = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{d}F \sin\alpha.$$

Подставив в последнее выражение значения $\mathrm{d}F$ (22), r и $\mathrm{d}\ell$ (23), получим

$$F = -\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\alpha \mathrm{d}\alpha = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right).$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2; \quad \cos\alpha = \frac{L}{2r} = \frac{L}{2\sqrt{L^2/4 + r_0^2}}.$$

$$F = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}3 \cdot 2}{0{,}2 \cdot 2 \cdot \sqrt{0{,}3^2/4 + 0{,}2^2}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Задача 5. Электрическое поле создано зарядами $q_1 = 30$ нКл и $q_2 = -10$ нКл. Расстояние между зарядами $d = 20$ см. Определить напряжённость и потенциал электрического поля в точке, находящейся на расстояниях $r_1 = 15\,\text{см}$ от первого и $r_2 = 10\,\text{см}$ от второго зарядов.

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей (4) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – векторы напряжённости электрического поля, создаваемого точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися в вакууме; модули их определяются по формуле (3):

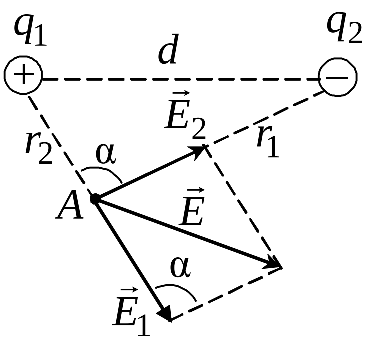


Рис. 5

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\varepsilon r_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\varepsilon r_2^2}.$$

Абсолютное значение вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где α – угол, лежащий против вектора $\vec{E}$; он может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d (рис. 5):

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} = -0{,}25.$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - 2\frac{q_1}{r_1^2}\frac{q_2}{r_1^2}\cos\alpha} = 1{,}67 \cdot 10^4\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Потенциалы поля зарядов q_1 и q_2 в точке A в соответствии с формулой (14) равны

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_2}.$$

Потенциал результирующего электрического поля в точке A находится алгебраическим сложением φ_1 и φ_2 (15).

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{3 \cdot 10^{-8}}{0{,}15} - \frac{10^{-8}}{0{,}10}\right) = 900\,(\text{В}).$$

Задача 6. По тонкому кольцу радиусом $R = 0{,}127$ м равномерно распределён заряд с линейной плотностью $\tau = 50$ нКл/м. Определить напряжённость $\vec{E}$ и потенциал φ электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке A, лежащей на оси кольца и удалённой от его центра на расстояние $L = 0{,}063$ м.

Решение. Выделим два диаметрально противоположных элемента длиной $\mathrm{d}\ell_1 = \mathrm{d}\ell_2 = \mathrm{d}\ell$, которые несут элементарный заряд $\mathrm{d}q = \tau \mathrm{d}\ell$, являющийся точечным зарядом. Он создает в точке A поле напряжённостью

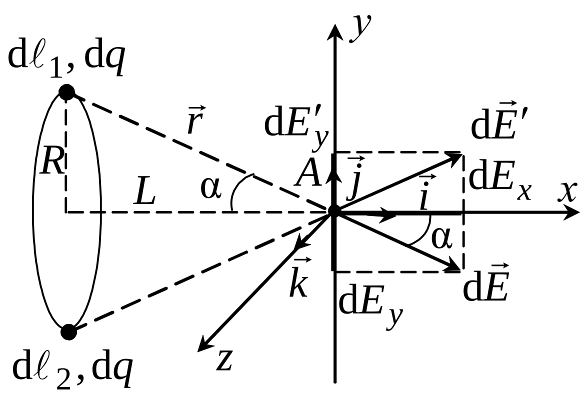


Рис. 6

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\tau \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

или в скалярной форме

$$\mathrm{d}E = \frac{\tau \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где τ – линейная плотность заряда, распределённого на кольце; r – расстояние от заряда $\mathrm{d}q$ до точки A.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей (5)

$$\vec{E} = \int_{\ell} \mathrm{d}\vec{E}.$$

Поскольку векторы $\mathrm{d}\vec{E}$ от каждого элемента кольца расположены под углом друг к другу (по образующей конуса), то нужно выбрать оси координат x, y, z и найти составляющие вектора $\mathrm{d}\vec{E}$ на выбранные оси $\mathrm{d}E_x$, $\mathrm{d}E_y$, $\mathrm{d}E_z$, связанные с $\mathrm{d}\vec{E}$ соотношением

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E_x \vec{i} + \mathrm{d}E_y \vec{j} + \mathrm{d}E_z \vec{k}.$$

Составляющие $\mathrm{d}E_x \vec{i}$ от всех электрических зарядов направлены по одной прямой вдоль оси x, а $\mathrm{d}E_y \vec{j}$ и $\mathrm{d}E'_y \vec{j}$, а также $\mathrm{d}E_z \vec{k}$ и $\mathrm{d}E'_z \vec{k}$ от диаметрально противоположных элементов направлены по одной прямой, но в противоположные стороны

$$\mathrm{d}E_y \vec{j} = -\mathrm{d}E'_y \vec{j}; \quad \mathrm{d}E_z \vec{k} = -\mathrm{d}E'_z \vec{k}.$$

Поэтому $E_y = \int \mathrm{d}E_y = 0$ и $E_z = \int \mathrm{d}E_z = 0$. Следовательно, результирующая напряжённость

$$E = E_x = \int\limits_{\ell} \mathrm{d}E \cdot \cos\alpha = \int\limits_{0}^{2\pi R} \frac{\tau \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{\tau \cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = L/r$; $r = \sqrt{L^2 + R^2}$.

$$E = \frac{\tau RL}{2\varepsilon_0 r^3} = \frac{\tau RL}{2\varepsilon_0 \left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}. \qquad (24)$$

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}127}{\left(0{,}127^2 + 0{,}063^2\right)^{3/2}} = 7{,}9 \left(\frac{\text{кВ}}{\text{м}}\right).$$

Ответ: $\vec{E} = 7{,}9 \cdot \vec{i}\ \dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

Потенциал поля $\mathrm{d}\varphi$, созданного элементарным зарядом $\mathrm{d}q$ в точке *A*,

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau \cdot \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля, созданного заряженным кольцом,

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{0}^{\ell} \frac{\tau \cdot \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int\limits_{0}^{2\pi R} \frac{\tau \cdot \mathrm{d}\ell}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + L^2}} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + L^2}}. \qquad (25)$$

$\varphi = 2{,}53\,\text{кВ}$.

Задача 7. На тонком диске радиусом $R = 0{,}12\,\text{м}$ равномерно распределён заряд $q = 1{,}80 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл}$. Найти напряжённость поля на оси диска как функцию расстояния от центра диска. Исследовать полученное выражение для $L << R$ и $L >> R$. Вычислить E и φ для $L = 0{,}08\,\text{м}$.

Решение. Выделим на диске бесконечно тонкое кольцо радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$. Площадь кольца (заштрихованного на рис. 7) $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$, заряд его $\mathrm{d}q = \sigma\mathrm{d}S = \sigma 2\pi r\mathrm{d}r$, где $\sigma = q/\pi R^2$ – поверхностная плотность заряда.

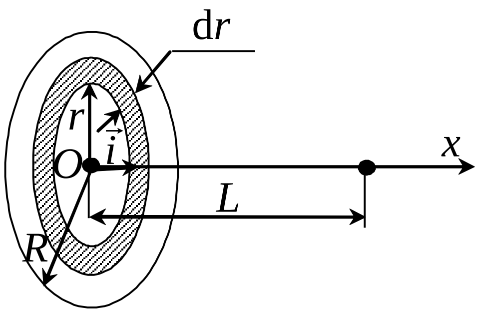


Рис. 7

$$\mathrm{d}q = \frac{2qr}{R^2}\mathrm{d}r. \qquad (25')$$

Напряжённость $\mathrm{d}\vec{E}$ поля, создаваемого тонким заряженным кольцом, направлена по оси диска Ox и равна (см. задачу 6):

$$\mathrm{d}E = \frac{L\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + L^2\right)^{3/2}}.$$

Замена $\mathrm{d}q$ по формуле (25') и последующее интегрирование дает

$$\mathrm{d}E = \frac{2qLr\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 R^2\left(r^2 + L^2\right)^{3/2}}.$$

$$E = \int \mathrm{d}E = \int \frac{2qLr\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 R^2\left(r^2 + L^2\right)^{3/2}} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{R^2}{L^2} + 1}}\right).$$

Если $L \ll R$, то

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} -$$

напряжённость поля бесконечно протяжённой заряженной плоскости.

Если $L \gg R$, то, заменив по формуле приближенных вычислений

$$\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + 1} = \frac{R^2}{2L^2} + 1,$$

получим $E = q/\left(4\pi\varepsilon_0 L^2\right)$ – напряжённость поля точечного заряда.

Для точки с $L = 0{,}08$ м

$$E = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 1{,}8\cdot 10^{-6}}{0{,}12^2}\left(1 - \frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}12^2 + 0{,}08^2}}\right) = 10^7\ (\text{В/м}).$$

Ответ: $E = 10^7$ В/м.

Задача 8. Полый стеклянный шар несет равномерно распределённый по объёму заряд. Объёмная плотность заряда $\rho = 100\,\text{нКл/м}^3$. Внутренний радиус шара $R_1 = 5\,\text{см}$, наружный $R_2 = 10\,\text{см}$. Вычислить напряжённость E электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на расстоянии: $r_1 = 3\,\text{см}$, $r_2 = 6\,\text{см}$, $r_3 = 12\,\text{см}$. Построить график зависимости E от r.

Решение. Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса (8). Приведём схему решения задач с помощью этой теоремы.

1. Выбрать вспомогательную замкнутую поверхность. При этом необходимо учесть следующее:

а) геометрия поверхности интегрирования должна учитывать симметрию поля;

б) поверхность должна проходить через ту точку, в которой требуется рассчитать напряжённость электрического поля;

в) размеры поверхности должны быть такими, чтобы в её пределах симметрия поля не нарушалась.

2. Указать направление вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля, созданного зарядами на теле. Выбрать направление нормали $\vec{n}$ к вспомогательной поверхности.

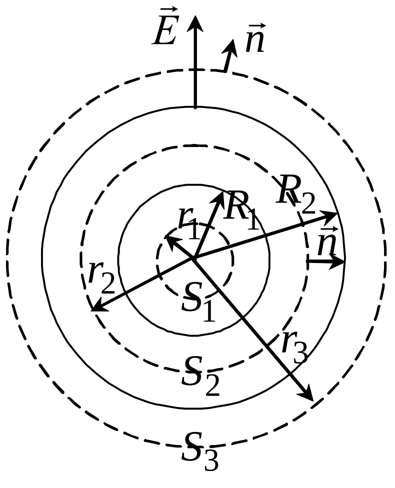


Рис. 8

3. Применить теорему Остроградского – Гаусса

$$\oint E dS\cos\alpha = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (26)$$

В данной задаче сферическая форма заряженного тела определяет выбор вспомогательных поверхностей в виде сфер S_1, S_2 и S_3 радиусами r_1, r_2 и r_3 соответственно (рис. 8). Векторы напряжённости электрического поля $\vec{E}$ направлены вдоль радиусов шара. За положительное направление нормали $\vec{n}$ к вспомогательным поверхностям выберем направление от центра сферы.

а) Для точек, находящихся внутри полости шара ($r_1 < R_1$), сумма зарядов внутри выбранной поверхности S_1 равна нулю ($\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$), откуда $\oint_{S_1} E_1 \mathrm{d}S \cos\alpha = 0$ и напряжённость $E_1 = 0$.

б) Для точек с расстоянием $R_1 < r_2 < R_2$ (в толще стенки сферы) в сумму зарядов $\sum q_i$ входят только заряды, находящиеся внутри поверхности S_2, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \rho V_2 = \rho(4/3)\pi\left(r_2^3 - R_1^3\right), \tag{27}$$

где ρ – объёмная плотность зарядов.

Поток вектора напряжённости Φ_{E_2} через вспомогательную поверхность S_2 равен

$$\Phi_{E_2} = \oint_{S_2} E_2 \mathrm{d}S \cos\left(\vec{E} \,\hat{,}\, \vec{n}\right).$$

Так как во всех точках вспомогательной поверхности S_2 напряжённость E_2 электрического поля одинакова ($E_2 = \mathrm{const}$), то её можно вынести из-под знака интеграла; $\cos\left(\vec{E} \,\hat{,}\, \vec{n}\right) = 1$.

$$\Phi_{E_2} = E_2 \oint_{S_2} \mathrm{d}S = E_2 S_2 = E_2 4\pi r_2^2. \tag{28}$$

Вводя в уравнение (26) выражения для суммы зарядов (27) и потока (28), получаем

$$E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = (4/3) \cdot \frac{\pi\left(r_2^3 - R_1^3\right)}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

откуда

$$E_2 = \frac{\rho\left(r_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2},$$

где $\varepsilon = 7$ (диэлектрическая проницаемость стекла.)

$$E_2 = 13{,}6\ \text{В/м}.$$

в) Для точек с расстоянием $r_3 > R_2$ (вне заряженной сферы) поток вектора напряжённости через вспомогательную поверхность S_3 равен

$$\Phi_{E_3} = \oint\limits_{S_3} E_3 \mathrm{d}S \cos\left(\vec{E}_3 \,\widehat{,}\, \vec{n}\right) = E_3 \cdot 4\pi r_3^3.$$

Внутри поверхности S_3 находится вся заряженная сфера. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \rho V_3 = \rho(4/3)\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Используя теорему Остроградского – Гаусса (8) и принимая $\varepsilon = 1$, получаем

$$E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 r_3^2},$$

$$E_3 = 229\ \text{В/м}.$$

При $r = R_2$

$$E_3' = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0 R_2^2},$$

$$E_3' = 343\ \text{В/м (вне сферы)}.$$

Внутри сферы

$$E_3'' = \frac{E_3'}{\varepsilon} = 49\ \text{В/м},$$

т. е. на границе раздела диэлектрик – вакуум напряжённость терпит разрыв (рис. 9).

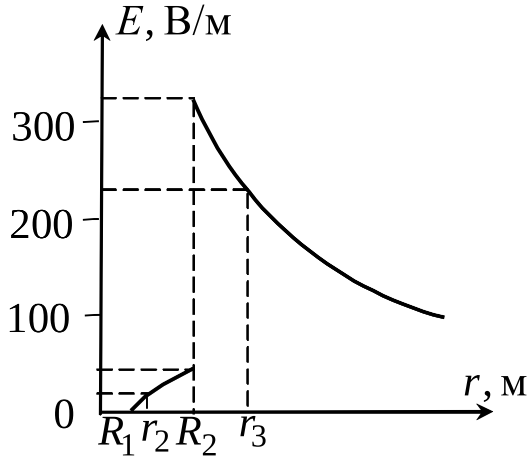


Рис.9

Задача 9. Лист стекла толщиной $d = 2$ см равномерно заряжен с объёмной плотностью $\rho = 1$ мкКл/м^3. Определить напряжённость E электрического поля в точках A, B, C. $AB = d/4$, $AC = d/2$. Построить график зависимости E от x (ось x перпендикулярна плоскости рисунка). $\varepsilon = 7$.

Решение. Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса (8), схема применения которой описана в задаче 8.

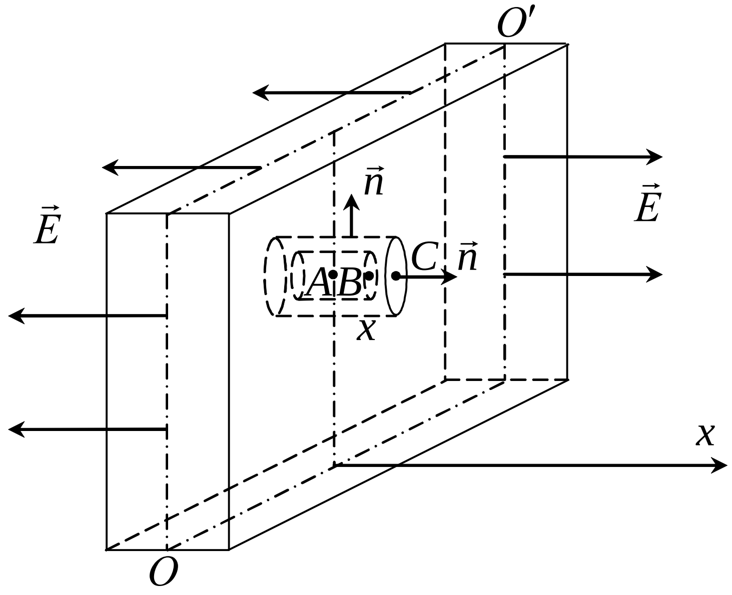


Рис. 10

В качестве вспомогательной замкнутой поверхности выберем цилиндрическую поверхность с образующей, равной $2x$, и с произвольным радиусом основания r (рис. 10). Поток вектора напряжённости электрического поля через цилиндрическую поверхность представим в виде

$$\oint\limits_S E_n \mathrm{d}S = 2\int\limits_{\text{осн}} E_n \mathrm{d}S + \int\limits_{\text{бок}} E_n \mathrm{d}S.$$

Поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность равен нулю ($\int\limits_{\text{бок}} E_n \mathrm{d}S = 0$), так как нормаль к боковой поверхности $\vec{n}$ и вектор напряжённости $\vec{E}$ поля пластины перпендикулярны. Тогда

$$\oint\limits_S E_n \mathrm{d}S = 2\int\limits_{\text{осн}} E_n \mathrm{d}S = 2ES,$$

где S – площадь основания вспомогательной цилиндрической поверхности. Из соображений симметрии $E_n = E$.

Заряд, охватываемый цилиндрической поверхностью,

$$\sum q_i = \rho V = \rho S 2x.$$

Следовательно, по теореме Остроградского – Гаусса

$$2ES = \frac{\rho S 2x}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В точке A (рис. 10) $x = 0$ и $E_A = 0$.

В точке B $x = d/4$,

$$E_B = \frac{\rho d}{4\varepsilon\varepsilon_0},$$

$E_B = 80$ В/м (в стекле).

В точке C $x = d/2$,

$$E_B = \frac{\rho d}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

$E_C = 160$ В/м (в стекле).

Вне стекла $\varepsilon = 1$,

$$E'_C = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0},$$

$E'_C = 1130$ В/м.

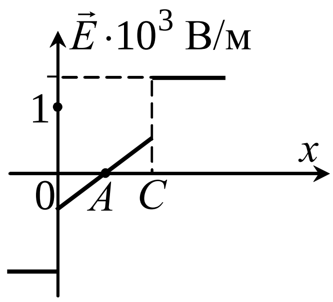


Рис. 11

График $E(x)$ представлен на рис. 11. На границе раздела двух сред (стекло – воздух) линии напряженности электрического поля претерпевают разрыв.

Задача 10. По тонкому кольцу радиусом R равномерно распределён заряд с линейной плотностью τ. Определить потенциал и напряжённость электрического поля в точке A, лежащей на оси кольца и удалённой от его центра на расстояние L (см. рис. 6).

Решение. Принцип суперпозиции позволяет определить искомые величины (см. решение задачи 6). При этом потенциал как скалярная величина находится проще, чем напряжённость. Если использовать связь потенциала с напряжённостью, то последнюю можно определить через потенциал. Так как потенциал равен

$$\varphi = \frac{k\tau \cdot 2\pi R}{\sqrt{R^2 + L^2}}, \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)$$

(см. формулу 25), то

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}L}\left(\frac{k\tau \cdot 2\pi R}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right) = \frac{L\tau R}{2\varepsilon_0 \left(R^2 + L^2\right)^{3/2}},$$

что совпадает с выражением (24), найденным по методу суперпозиции.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Электрический заряд. Закон Кулона. Равновесие зарядов

1.1. С какой относительной погрешностью ε надо измерять заряды порядка 10^{-9} Кл, чтобы обнаружить дискретную природу заряда?

$\varepsilon \approx 10^{-11}$.

1.2. Чему равен суммарный заряд моля электронов?

$q = -9{,}65 \cdot 10^{-4}$ Кл/моль $= -F$ (F – число Фарадея).

1.3. Найти суммарный заряд q атомных ядер меди, содержащихся в 1 см^3.

$q = 3{,}9 \cdot 10^5$ Кл.

1.4. Какой заряд приобрел бы медный шар с радиусом $R = 10$ см, если бы удалось удалить все электроны?

$q = 5{,}6 \cdot 10^7$ Кл.

1.5. С какой силой будут притягиваться два одинаковых свинцовых шарика радиусом $R = 1$ см, расположенных на расстоянии $r = 1$ м, если у каждого атома первого шарика отнять по одному электрону и перенести их на второй шарик?

$F = 4{,}38 \cdot 10^{18}$ Н.

1.6. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, причем сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их гравитационного тяготения. Каковы радиусы капелек?

$R = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ м.

1.7. Два маленьких шарика одинаковой массы m подвешены на нитях одинаковой длины ℓ в общей точке. Шарикам сообщили одинаковый заряд q, после чего они оттолкнулись и равновесный угол между нитями стал равен α (в воздухе).

1.7.1. Как изменится равновесный угол между нитями, если длину нитей и заряд шариков удвоить?

Не изменится.

1.7.2. Шарики перенесли из воздуха в жидкость ($\varepsilon = 2$). Плотность жидкости вдвое меньше плотности материала шариков. Как изменится равновесный угол между нитями?

Не изменится.

1.7.3. Масса шариков $m = 1$ г каждый, длина нитей $\ell = 10$ см. Равновесный угол $\alpha = 60^\circ$. Определить заряд каждого шарика.

$q = 79$ нКл.

1.7.4. Шарики погружаются в масло плотностью $\rho_1 = 8 \cdot 10^2$ кг/м^3. Какова диэлектрическая проницаемость масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho_1 = 1{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

$$\varepsilon = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} = 2.$$

1.7.5. Шарики перенесли из воздуха в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ, диэлектрическая проницаемость ε. Какова должна быть плотность ρ_0 материала шариков, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике были одинаковыми?

$\rho_0 = \varepsilon\rho/(\varepsilon - 1)$.

1.7.6. Заряд каждого шарика $q = 0{,}4\,\text{мкКл}$, длина нитей $\ell = 20\,\text{см}$, равновесный угол расхождения нитей $2\alpha = 60^\circ$. Найти массу каждого шарика.

$$m = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4\ell^2 \sin 2\alpha\ \mathrm{tg}\alpha} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}.$$

1.7.7. Какой заряд q надо сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной $T = 98\,\text{мН}$? $\ell = 10\,\text{см}$, $m = 5\,\text{г}$.

$q = 1{,}1\,\text{мкКл}$.

1.8. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 3\,\text{см}$ находятся заряды q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, одинаковые по абсолютному значению и равные 5 нКл. В центр шестиугольника помещен заряд $q = 4\,\text{нКл}$. Найти силу, действующую на этот заряд со стороны зарядов $q_1 - q_6$ в следующих случаях:

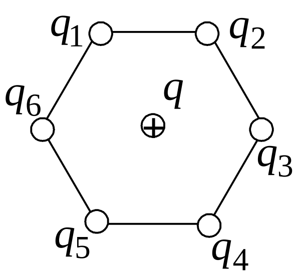


Рис. 12

1.8.1. Все шесть зарядов положительные.

1.8.2. q_1, q_2, q_5 – положительные, q_3, q_4, q_6 – отрицательные.

1.8.3. q_1, q_2, q_3 – положительные, q_4, q_5, q_6 – отрицательные.

1.8.4. q_1, q_3 – положительные, q_2, q_4, q_5, q_6 – отрицательные.

1.8.5. q_1, q_2 – отрицательные, q_3, q_4, q_5, q_6 – положительные.

1.8.6. q_1 – отрицательный, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 – положительные.

1.8.7. q_1, q_3, q_5 – положительные, q_2, q_4, q_6 – отрицательные.

1.9. Два точечных заряда $q_1 = 7{,}5\,\text{нКл}$ и $q_2 = -14{,}7\,\text{нКл}$ расположены на расстоянии $a = 3\,\text{см}$ (рис. 13). Найти силу, действующую со стороны этих зарядов на заряд $q = 5\,\text{нКл}$. Координаты заряда q:

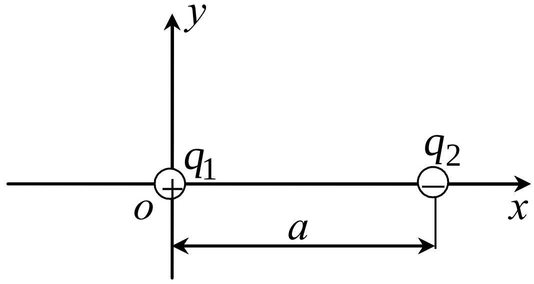


Рис. 13

1.9.1. $x = a/2$, $y = 0$.

1.9.2. $x = -a/2$, $y = 0$.

1.9.3. $x = a/2$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 1.9.4. $x = a$, $y = a/2$.

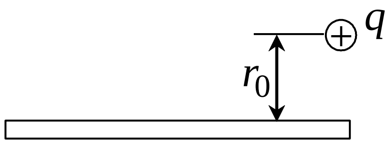
1.9.5. $x = 0$, $y = -a/2$. 1.9.6. $x = \frac{3}{2}a$, $y = 0$.

1.9.7. $x = \frac{3}{2}a$, $y = -a/2$.

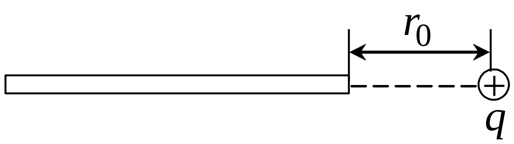
1.10. Найти силу, действующую на точечный заряд $q = 1\,\text{нКл}$, расположенный на расстоянии $r_0 = 20\,\text{см}$ от:

1.10.1. бесконечно длинной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau = 0{,}2\,\text{мкКл/м}$;

1.10.2. равномерно заряженного тонкого стержня длиной 40 см напротив середины стержня; линейная плотность заряда на стержне $\tau = 0{,}2\,\text{мкКл/м}$;



1.10.3. равномерно заряженного тонкого стержня длиной 40 см напротив его конца; линейная плотность заряда $\tau = 0{,}2\,\text{мкКл/м}$;



1.10.4. см. условие задачи 1.10.3. Заряд расположен на оси стержня;

1.10.5. равномерно заряженного тонкого кольца на его оси; радиус кольца 5 см, линейная плотность заряда $\tau = 0{,}2\,\text{мкКл/м}$;

1.10.6. равномерно заряженного полукольца в центре кривизны. Линейная плотность заряда $\tau = 0{,}2\,\text{мкКл/м}$;

1.10.7. бесконечно протяжённой равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 40\,\text{мкКл/м}^2$.

2. Расчет напряжённости и потенциала электрического поля с помощью принципа суперпозиции

2.1. Определить напряжённость и потенциал поля, созданного точечным зарядом $q = 10^{-8}$ Кл на расстоянии $r = 10\,\text{см}$ от него. Диэлектрик – масло.

2.2. Расстояние между точечными зарядами $q_1 = 9q$ и $q_2 = q$ $d = 8\,\text{см}$. На каком расстоянии от первого заряда находится точка, в которой напряжённость поля зарядов равна нулю? Где находилась бы эта точка, если бы второй заряд был отрицательным? Найти потенциал в обоих случаях.

2.3. Два точечных заряда $q_1 = 7{,}5\,\text{нКл}$ и $q_2 = -14{,}7\,\text{нКл}$ расположены на расстоянии $a = 3\,\text{см}$. Рассчитать напряжённость и потенциал поля в точке, координаты которой равны (см. рис. 13):

2.3.1. $x = a/2$, $y = 0$;

2.3.2. $x = 0$, $y = -a/2$;

2.3.3. $x = a/2$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$;

2.3.4. $x = a$, $y = a/2$;

2.3.5. $x = -a/2$, $y = 0$;

2.3.6. $x = \dfrac{3}{2}a$, $y = 0$;

2.3.7. $x = \dfrac{3}{2}a$, $y = -a/2$.

2.4. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 3\,\text{см}$ находятся заряды q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 (см. рис. 12). Найти напряжённость электрического поля в центре шестиугольника, если:

2.4.1. все шесть зарядов равны 4 нКл;

2.4.2. $q_1 = q_2 = q_5 = 4$ нКл, $q_3 = q_4 = q_6 = -4$ нКл;

2.4.3. $q_1 = q_2 = q_3 = 4$ нКл, $q_4 = q_5 = q_6 = -4$ нКл;

2.4.4. $q_1 = q_3 = 4$ нКл, $q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = -4$ нКл;

2.4.5. $q_1 = q_2 = 4$ нКл, $q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = -4$ нКл;

2.4.6. $q_1 = -4$ нКл, $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 4$ нКл;

2.4.7. $q_1 = q_3 = q_5 = 4$ нКл, $q_2 = q_4 = q_6 = -4$ нКл.

2.5. В вершинах квадрата со стороной $a = 2\,\text{см}$ помещены точечные заряды q_1, q_2, q_3, q_4 (рис. 14). Определить напряжённость и потенциал поля зарядов в центре квадрата, если:

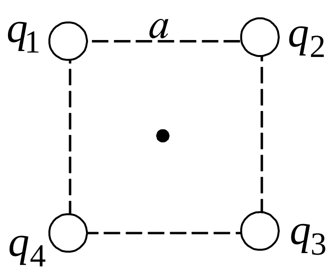


Рис. 14

2.5.1. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 8$ нКл;

2.5.2. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = -8$ нКл;

2.5.3. $q_1 = 8$ нКл, $q_2 = q_3 = q_4 = -8$ нКл;

2.5.4. $q_1 = q_2 = 8$ нКл, $q_3 = q_4 = -8$ нКл;

2.5.5. $q_1 = q_3 = 8$ нКл, $q_2 = q_4 = -8$ нКл;

2.5.6. $q_1 = 0$, $q_2 = q_3 = q_4 = 8$ нКл;

2.5.7. $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = q_4 = 8$ нКл.

2.6. Электрическое поле создано тонким равномерно заряженным стержнем с линейной плотностью заряда $\tau = 10^{-8}$ Кл/м. Найти напряжённость и потенциал электрического поля в точке A (рис. 15) в следующих случаях:

2.6.1. стержень бесконечно длинный, $L = 10$ см (рис. 15.1);

2.6.2. длина стержня $\ell = 20$ см, $L = 10$ см (рис. 15.2);

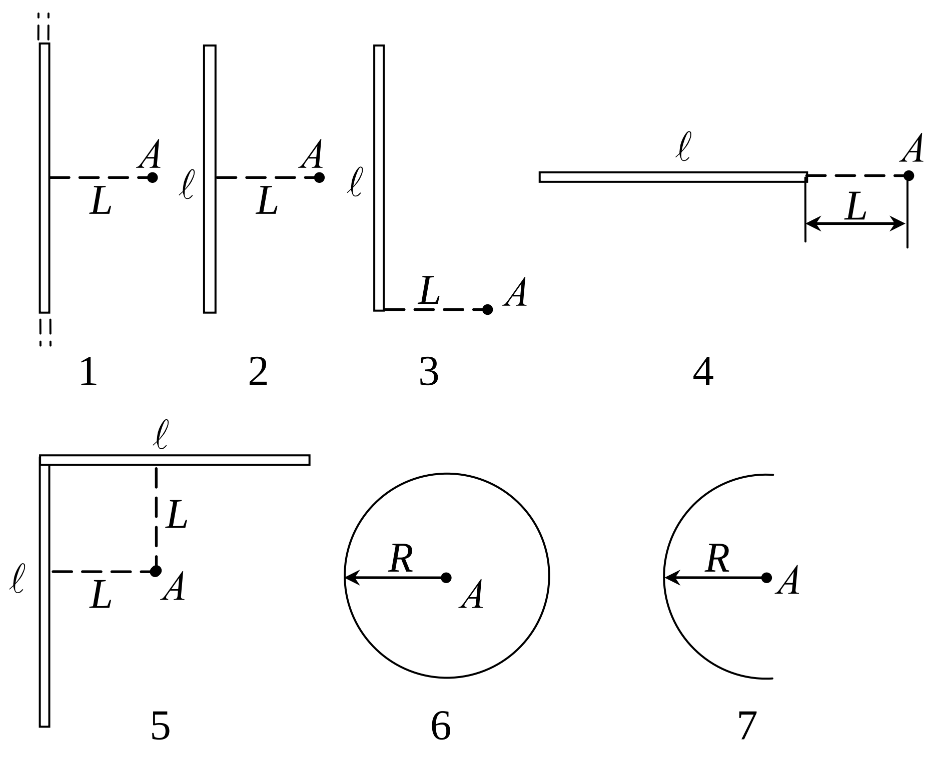


Рис. 15

2.6.3. $\ell = 20$ см, $L = 10$ см (рис. 15.3);

2.6.4. $\ell = 20$ см, $L = 10$ см (рис. 15.4);

2.6.5. два стержня длиной $\ell = 20$ см образуют прямой угол, $L = 10$ см (рис. 15.5);

2.6.6. стержень согнут в кольцо радиусом $R = 10$ см (рис. 15.6);

2.6.7. стержень согнут в полукольцо $R = 10$ см (рис. 15.7).

2.7. Электрическое поле создано двумя бесконечно протяжёнными тонкими пластинами, заряд на которых распределён равномерно с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2. Определить напряжённость поля: 1) между пластинами, 2) вне пластин. Построить график изменения напряжённости вдоль линии, перпендикулярной пластинам, если:

2.7.1. пластины параллельны друг другу, $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^{-3}$ мкКл/м^2.

2.7.2. пластины параллельны друг другу, $\sigma_1 = 10^{-3}$ мкКл/м^2, $\sigma_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м^2;

2.7.3. пластины параллельны друг другу, $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м^2, $\sigma_2 = -5 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м^2;

2.7.4. пластины расположены перпендикулярно друг другу, $\sigma_1 = 10^{-3}$ мкКл/м^2, $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м^2. Определить напряжённость электрического поля. Начертить картину силовых линий;

2.7.5. пластины расположены под углом $\alpha = 60^\circ$ друг к другу, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}1$ мкКл/м^2. Определить напряжённость поля между пластинами и начертить картину силовых линий;

2.7.6. пластины расположены под углом $\alpha = 30^\circ$ друг к другу, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}1$ мкКл/м^2. Определить напряжённость поля пластин и начертить картину силовых линий;

2.7.7. пластины расположены под углом $\alpha = 120^\circ$ друг к другу, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}1$ мкКл/м^2. Определить напряжённость поля пластин и начертить картину силовых линий.

3. Поток вектора напряжённости. Расчет напряжённости электрического поля с помощью теоремы Остроградского – Гаусса

3.1. Рассчитать поток вектора напряжённости однородного электрического поля ($E = 10^4$ В/м) через поверхность квадрата со стороной $a = 0{,}1$м при $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{E}$ (рис. 16, *а*) и через поверхность куба с длиной грани a (рис. 16, *б*).

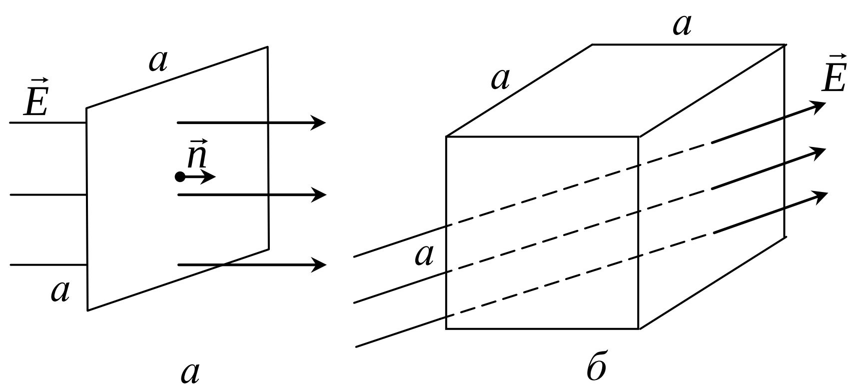


Рис. 16

3.2. Точечный заряд q окружён сферической поверхностью радиусом R. Изменится ли значение потока Φ_E вектора напряжённости электрического поля, если сферу заменить кубом со стороной $a = R/2$?

3.3. Электрический диполь окружён замкнутой поверхностью S. Чему равен поток вектора напряжённости поля диполя через эту поверхность?

3.4. Чему равен поток вектора $\vec{E}$ через поверхность сферы, в центре которой находится: а) точечный заряд, б) диполь с моментом $\vec{p}$? Объяснить результат с помощью картины силовых линий.

3.5. Рассчитать число силовых линий, уходящих в бесконечность, для двух случаев, показанных на рис. 17, *а* и *б*.

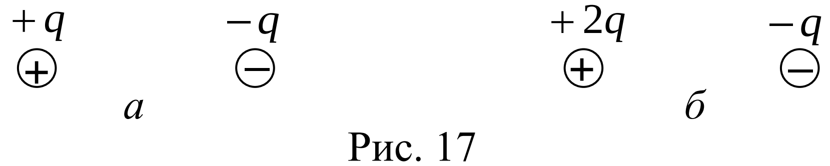


Рис. 17

3.6. Заряд $q_1 = -4 \cdot 10^{-5}$ Кл помещён на расстоянии r от заряда $q_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл. Какое число силовых линий уходит в бесконечность, если предположить, что других зарядов нет?

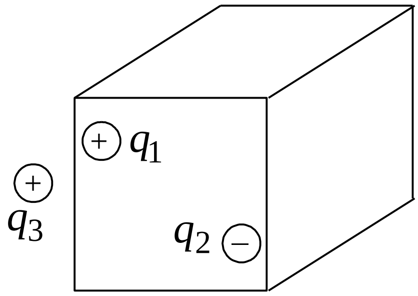


Рис. 18

3.7. Электрическое поле создано зарядами $q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_2 = -5 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_3 = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Рассчитать поток вектора напряжённости через поверхность куба со стороной $a = 2$ см (рис. 18).

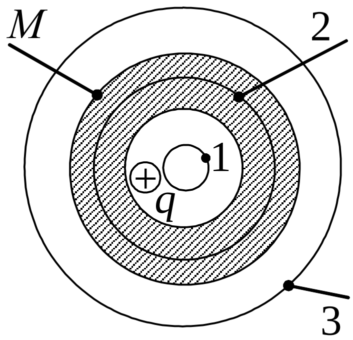


Рис. 19

3.8. Точечный заряд q находится внутри незаряженной металлической полости M (заштрихованная область). Найти поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутые поверхности 1, 2, 3 (рис. 19). Построить примерную картину силовых линий вектора $\vec{E}$.

3.9. Используя теорему Остроградского – Гаусса, показать, что величина напряжённости E электрического поля, созданного точечным зарядом q,

$$E = kq / r^2, \qquad (k = 1/4\pi\varepsilon_0).$$

3.10. Земля обладает электрическим полем, напряжённость которого вблизи поверхности ($r \ge R_3$) $E = 10^2$ Н/Кл. Используя теорему Остроградского – Гаусса, определить поверхностную плотность σ заряда, создающего это поле. Сколько для этого требуется избыточных электронов на каждый 1 м^2 поверхности?

3.11. В центре заряженного стеклянного ($\varepsilon_1 = 7$) шара радиусом $R_2 = 10$ см имеется полость радиусом $R_1 = 5$ см (см. рис. 8). Заряд шара $q = 10^{-7}$ Кл. Шар помещён в масло ($\varepsilon_2 = 2{,}2$). Какова напряжённость E электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на расстояния: $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см, $r_3 = 12$ см? Построить график $E = E(r)$.

3.12. Очень длинная тонкая прямая проволока несёт заряд, равномерно распределённый по всей ее длине. Вычислить линейную плотность τ заряда на проволоке, если напряжённость поля на расстоянии $a = 0{,}5$ м от нее против её середины равна 200 В/м.

3.13. На бесконечном тонкостенном цилиндре диаметром $d = 20$ см равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 4$ мкКл/м^2. Определить напряжённость электрического поля в точках, отстоящих от оси цилиндра на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 15$ см.

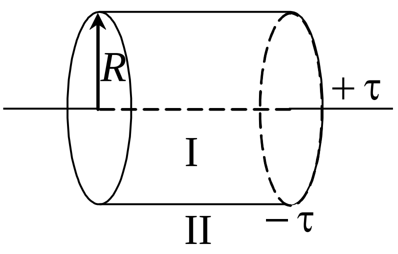


Рис. 20

3.14. Внутренний провод коаксиального кабеля окружён полым цилиндрическим проводником радиусом R. Линейные плотности заряда на этих проводниках $+\tau$ и $-\tau$, соответственно. Используя теорему Остроградского – Гаусса, получить формулы для определения напряжённости E электрического поля в областях I и II (рис. 20). Построить график $E = E(r)$.

3.15. Определить напряжённость E поля, создаваемого тонким длинным стержнем, равномерно заряженным с линейной плотностью заряда $\tau = 20$ мкКл/м в точке, находящейся на расстоянии $a = 2$ см от стержня, вблизи его середины.

3.16. Длинный металлический стержень равномерно заряжен с объёмной плотностью заряда ρ. Получить, используя теорему Остроградского – Гаусса, формулу для расчёта напряжённости внутри стержня. Изобразить графически зависимость $E = E(r)$, где $r \le R$ (R – радиус стержня).

3.17. Используя теорему Остроградского – Гаусса, получить формулу для расчёта напряжённости поля, созданного равномерно заряженной тонкой бесконечно протяженной плоскостью. Поверхностная плотность заряда на плоскости σ.

3.18. Большая плоская пластина толщиной $d = 1$ см несёт заряд, равномерно распределённый по объёму с объёмной плотностью $\rho = 100$ нКл/м^3. Найти напряжённость E электрического поля вблизи центральной части пластины вне ее, на малом расстоянии от поверхности.

3.19. Плоский слой диэлектрика $(\varepsilon = 2)$ толщиной 0,5 см равномерно заряжен, причем 1 см^3 слоя имеет заряд $3 \cdot 10^{-10}$ Кл. Какова напряжённость поля: а) в середине слоя, б) внутри слоя на расстоянии 0,1 см от поверхности, в) вне слоя?

3.20. Плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ. В середине плоскости имеется небольшое отверстие радиусом R. Найти напряжённость поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости, проходящем через центр отверстия на расстоянии b от плоскости.

3.21. Металлический шар радиусом 2 см окружён сферической металлической оболочкой радиусом 4 см, концентрической с шаром. Заряд шара $+2 \cdot 10^{-8}$ Кл, оболочки $-4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определить напряжённость поля на расстоянии: а) 3 см, б) 5 см от центра шара.

3.22. Шарик радиусом 2 см, сделанный из диэлектрика, равномерно заряжен с объёмной плотностью заряда $2 \cdot 10^{-10}$ Кл/м^3. Какова напряжённость поля на расстоянии 3 см от центра шара?

3.23. Эбонитовый сплошной шар радиусом $R = 5$ см равномерно заряжен с объёмной плотностью заряда $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряжённость поля в точках: а) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра сферы, б) на поверхности сферы, в) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра сферы. Построить график зависимости $E(r)$.

4. Эквипотенциальные поверхности. Связь потенциала с напряжённостью

4.1. Изобразите графически с помощью линий напряжённости и эквипотенциальных поверхностей поле, созданное:

4.1.1. точечным положительным зарядом, точечным отрицательным зарядом;

4.1.2. равномерно заряженной сферой $(\sigma > 0)$;

4.1.3. равномерно заряженным диэлектрическим шаром ($\rho > 0$);

4.1.4. положительно заряженным металлическим шаром;

4.1.5. электрическим диполем;

4.1.6. равномерно заряженной длинной нитью ($\tau < 0$);

4.1.7. бесконечно длинным равномерно заряженным полым цилиндром ($\sigma > 0$);

4.1.8. равномерно заряженным бесконечно длинным сплошным цилиндром из диэлектрика ($\rho > 0$);

4.1.9. равномерно заряженным бесконечно длинным сплошным металлическим цилиндром ($\rho < 0$);

4.1.10. бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскостью ($\sigma > 0, \sigma < 0$).

Укажите на рисунке направление градиента потенциала.

4.2. Найти напряжённость поля E, если потенциал поля $\varphi = cr$, где c – отрицательная константа; r – расстояние от начала координат до точки наблюдения. Изобразить эквипотенциальные поверхности и линии поля $\vec{E}$.

4.3. На рис. 21 приведена картина линий поля. Изобразить эквипотенциальные поверхности и указать направление, в котором потенциал возрастает.

4.4. Какой по знаку точечный электрический заряд создает поле, если $\varphi_1 > \varphi_2$ (рис. 22). Укажите направление линий напряжённости.

4.5. Четыре точечных заряда расположены в вершинах квадрата (рис. 23). Указать направление максимального возрастания потенциала в центре квадрата O.

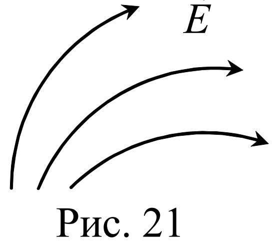


Рис. 21

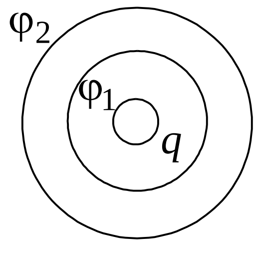


Рис. 22

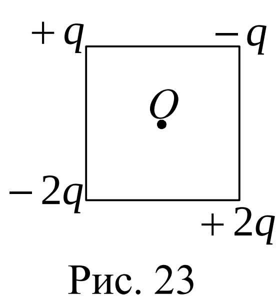


Рис. 23

4.6. Потенциал электрического поля задается формулой

$$\varphi = Ax + By,\quad A = 2\ \text{В/м},\quad B = 4\ \text{В/м}.$$

Определите напряжённость электрического поля в любой точке. Постройте картину силовых линий такого поля.

4.7. Какими по величине и знаку должны быть два точечных заряда, чтобы в точке, расположенной на середине соединяющей их линии, потенциал $\varphi = 0$.

4.8. Напряжённость некоторого поля имеет вид $\vec{E} = E\vec{i}$, где E – константа. Написать выражение для потенциала поля φ.

4.9. Напряжённость электростатического поля имеет вид

$$\vec{E} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k},$$

где a, b, c – константы. Является ли это поле однородным? Написать выражение для φ.

4.10. Напряжённость электростатического поля определяется выражением

$$\vec{E} = \left(a / r^3\right)\vec{e}_r,$$

где a – константа. Является ли это поле однородным? Найти потенциал этого поля $\varphi(r)$.

4.11. Потенциал электростатического поля имеет вид

$$\varphi = \varphi\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Что можно сказать о характере поля? Найти модуль $\left|\vec{E}\right|$ напряжённости поля в точке x, y, z.

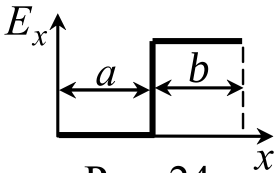


Рис. 24

4.12. Напряжённость электростатического поля E_x изменяется, как показано на рис. 24. Вектор $\vec{E}$ параллелен оси Ox. Как изменяется потенциал в направлении оси Ox в областях a и b?

4.13. По графику зависимости $E = E(x)$ (рис. 25) для некоторого электростатического поля определить, где распределён заряд, создающий это поле. Изобразить зависимость $\varphi = \varphi(x)$ для данного поля.

4.14. По графику зависимости $\varphi = \varphi(x)$ (рис. 26) определить, в какой точке напряжённость электрического поля обращается в нуль. Ответ пояснить.

4.15. Указать на графике $\varphi = \varphi(x)$ (рис. 27) области, в которых модуль напряжённости электрического поля с плоской симметрией уменьшается с ростом x.

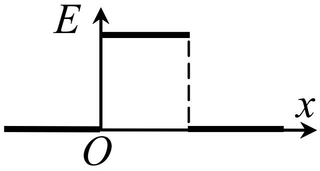


Рис. 25

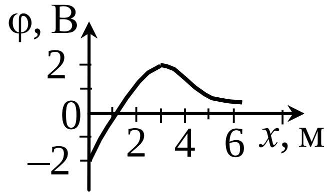


Рис. 26

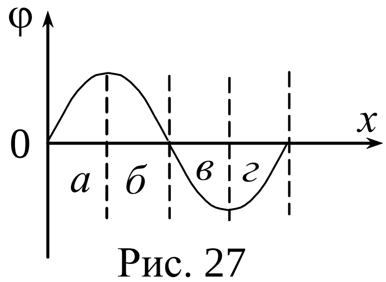


Рис. 27

4.16. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 4\,\text{нКл/м}^2$. Определить значение и направление градиента потенциала электрического поля, созданного этой плоскостью. Найдите разность потенциалов для точек, находящихся от плоскости на расстояниях $r_1 = 10\,\text{см}$ и $r_2 = 20\,\text{см}$.

4.17. Напряжённость E однородного электрического поля в некоторой точке равна 600 В/м. Вычислить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между этой точкой и другой, лежащей на прямой, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением вектора напряжённости. Расстояние Δr между точками равно 2 мм.

Список рекомендуемой литературы

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие: в 3 т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 467 с.

2. Фриш, С. Э. Курс общей физики : учебник: в 3 т. Т. 2. Электрические и магнитные явления / С. Э. Фриш. – Санкт-Петербург : Лань, 2007. – 514 с.

3. Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие / Т. И. Трофимова. – Москва : Академия, 2007. – 560 с.

4. Чертов, А. Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 2005. – 640 с.

5. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики : для студентов втузов / В. С. Волькенштейн. – Санкт-Петербург : Книжный мир , 2007. – 328 с.

СОСТАВИТЕЛИ

Софья Алексеевна Шепелева
Ирина Валентиновна Цвеклинская

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

НАПРЯЖЕННОСТЬ. ПОТЕНЦИАЛ

Методические указания к практическим занятиям
по курсу физики для обучающихся всех специальностей
и направлений бакалавриата всех форм обучения

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 25.03.2019. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л. 1,9.
Тираж 34 экз. Заказ
КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.
Издательский центр УИП КузГТУ. 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а.