Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачёва»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Д. Ю. Сирота

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Рекомендовано для использования в учебном процессе
учебно-методической комиссией бакалавриата по направлению
221400.62 «Управление качеством»

Кемерово 2013

Рецензенты

Гуцал М. В., доцент	кафедры	ТиГМ
ФИО, должность		Наименование кафедры
Шатько Д.Б, председатель	УМК по направлению	221400.62 «Управление качеством»
ФИО, член УМК или председатель		код и наименование специальности или направления подготовки

Сирота Дмитрий Юрьевич. Теоретическая механика. Конспект лекций. [Электронный ресурс]: для студентов бакалавриата по направлению 221400.62 «Управление качеством», профиль 221401 «Управление качеством в производственно-технических системах»; для студентов бакалавриата по направлению 151900.62 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», профили 151901 «Технология машиностроения», 150902 «Металлообрабатывающие станки и комплексы»/ Д. Ю. Сирота. – Электрон. дан. – Кемерово : КузГТУ, 2013. – Систем. требования : Pentium IV ; ОЗУ 512 Мб ; Windows XP, GNU/Linux; мышь. – Загл. с экрана.

Представленный конспект лекций может использоваться для подготовки студентов к лекционным занятиям, к экзаменам и зачётам.

В содержательном плане представленный конспект ориентирован на перечень тем, которые указанны в рабочей программе направления, а также перечень дидактических единиц, которые содержатся в тестовых материалах «ФЭПО».

Конспект лекций содержит необходимый теоретический материал и примеры решения задач.

РАЗДЕЛ I

СТАТИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного положения материальных точек или тел в пространстве.

2. Механическое взаимодействие – это такой вид взаимодействия материальных тел, который стремится изменить характер их механического движения.

3. Абсолютно твердое тело – это тело, расстояния между любыми точками которого остаются неизменными при любых воздействиях.

4. Сила – это мера механического взаимодействия тел, которая устанавливает интенсивность и направление этого взаимодействия.

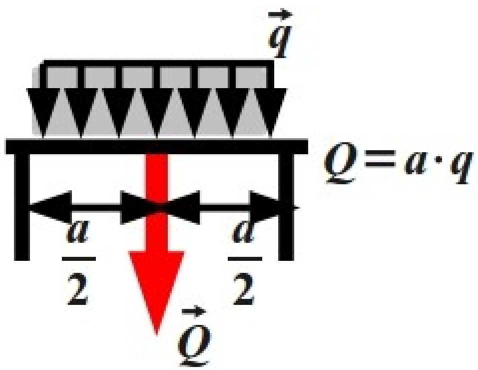
Сила характеризуется тремя элементами:

1) числовым значением (модулем)
2) направлением
3) точкой приложения

Математическая модель силы – **вектор**

$$\vec{F} = F^X \cdot \vec{i} + F^Y \cdot \vec{j} + F^Z \cdot \vec{k} \qquad (1)$$

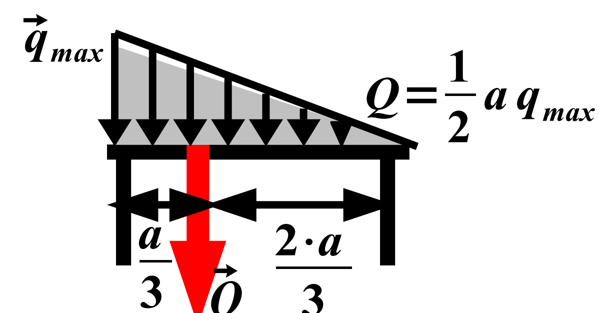
Единица измерения силы – **Ньютон (Н = кг·м/с²)**



Линия действия силы – это линия, вдоль которой действует сила.

Система сходящихся сил – это набор сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Равнодействующая сила *R* – это сила, воздействие которой на тело совпадает с воздействием системы сходящихся сил на это же тело.



Уравновешивающая сила *S* – это сила, равная по модулю равнодействующей и направленная в противоположную сторону вдоль линии её действия

Равновесие тела – состояние покоя по отношению к другим телам.

КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

На каждую точку тела действует направленная вертикально вниз сила тяжести, в совокупности эти параллельные силы образуют поле сил тяжести с равнодействующей силой $\boldsymbol{P}$ (весом тела).

Точка приложения силы $\boldsymbol{P}$ называется **центром тяжести** тела. Координаты центра тяжести (КЦТ) однородного тела определяются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{P}\cdot\sum_k p_k\cdot x_k = \frac{1}{\Omega}\cdot\sum_k \omega_k\cdot x_k$$

$$y_C = \frac{1}{P}\cdot\sum_k p_k\cdot y_k = \frac{1}{\Omega}\cdot\sum_k \omega_k\cdot y_k \qquad (2)$$

$$z_C = \frac{1}{P}\cdot\sum_k p_k\cdot z_k = \frac{1}{\Omega}\cdot\sum_k \omega_k\cdot z_k$$

здесь P, Ω – вес и мера (длина, площадь, объём) тела;
x_k, y_k, z_k – координаты частиц тела;
p_k, ω_k – вес и мера (длина, площадь, объём) частей тела

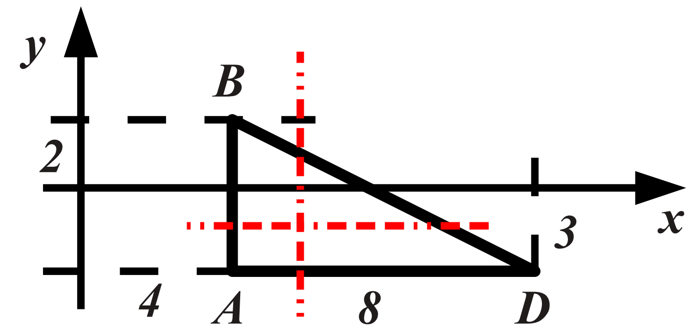
Правила определения координат центра тяжести

1) Правило симметрии: если тело обладает точкой, осью, плоскостью симметрии, то центр тяжести расположен именно на них.

2) Правило разбиения: если тело можно разбить на части, для каждой из которых известны мера и КЦТ, то можно воспользоваться формулами (2).

3) Правило вырезов: если тело содержит вырезы и при этом известны мера и КЦТ всего тела и вырезанных частей, то можно воспользоваться формулами (2) с отрицательными мерами для вырезаемых частей

КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ (ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ)



Дан треугольник с вершинами ***A*** (4; -3) ***B*** (4;2) ***D*** (12; -3)

Найти координаты цента тяжести

Геометрический метод решения: центр тяжести в точке пересечения медиан.

Середины отрезков ***AD*** и ***BD***: ***M*** (8; -3) ***N*** (8; -0,5)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow x\cdot(y_2-y_1)-y\cdot(x_2-x_1)=x_1\cdot(y_2-y_1)-y_1\cdot(x_2-x_1)$$

$$AN\quad x\cdot(-0{,}5+3)-y\cdot(8-4)=4\cdot(-0{,}5+3)+3\cdot(8-4)\Rightarrow 2{,}5\cdot x-4\cdot y=22$$

$$BM\quad x\cdot(-3-2)-y\cdot(8-4)=4\cdot(-3-2)-2\cdot(8-4)\Rightarrow 5\cdot x+4\cdot y=28$$

Точка пересечения медиан: $\begin{cases}2{,}5\cdot x-4\cdot y=22\\ 5\cdot x+4\cdot y=28\end{cases}\Rightarrow 7{,}5\cdot x=50\Rightarrow x_C=6{,}667\Rightarrow y_C=-1{,}333$

Ответ: $C(6{,}667;-1{,}333)$

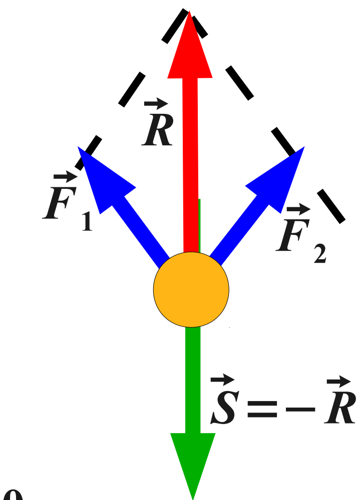
Упрощённый метод решения (для прямоугольного треугольника): центр тяжести в точке пересечения вертикальной и горизонтальной прямой, проходящей на расстоянии 1/3 одного катета от другого катета (точка пересечения красных пунктирных линий)

$$x_C=4+\frac{1}{3}\cdot AD=4+\frac{1}{3}\cdot 8=6{,}667\qquad y_C=-3+\frac{1}{3}AB=-3+\frac{1}{3}\cdot 5=-1{,}333$$

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах. При этом величина этой силы и направляющие углы определяется по формулам:

(1) $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ (2) $\sin(\vec{R}, \vec{F}_i) = \dfrac{F_j \cdot \sin(\vec{F}_1, \vec{F}_2)}{R}$

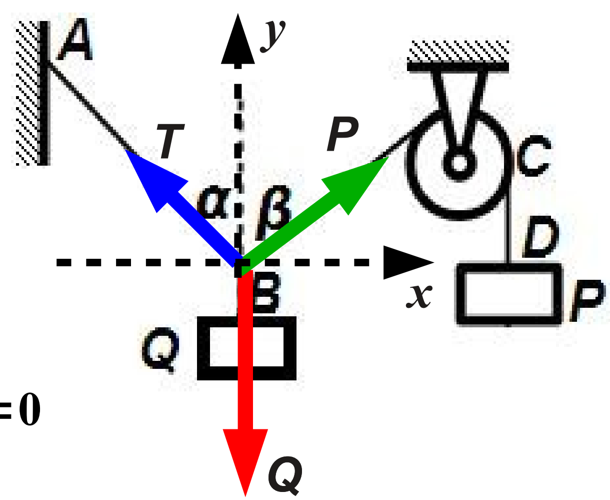


Теорема. Тело находится под действием трех сил в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы являются сходящимися.

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

(3) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n = 0$ (4) $R^X = F_1^X + \ldots + F_n^X = 0$ (5) $R^Y = F_1^Y + \ldots + F_n^Y = 0$

Пример. К верёвке ***AB***, один конец которой закреплён в точке ***A***, привязаны в точке ***B*** груз ***Q*** и верёвка ***BCD***, перекинутая через блок; в её концу ***D*** привязана гиря ***P*** веса 100 ***Н***. Определить натяжение ***T*** верёвки ***AB*** и величину груза ***Q***, если конструкция находится в положении равновесия и $\alpha = 30^0$ и $\beta = 60^0$.



Решение:

$$R^X = P\sin(\beta) - T\sin(\alpha) = 100 \cdot 0{,}866 - T \cdot 0{,}5 = 86{,}6 - 0{,}5T = 0$$

$$R^Y = P\cos(\beta) + T\cos(\alpha) - Q = 100 \cdot 0{,}5 + T \cdot 0{,}866 - Q = 50 + 0{,}866T - Q = 0$$

$$T = \frac{86{,}6}{0{,}5} = 173{,}2 \qquad Q = 50 + 0{,}866T = 199{,}991$$

Ответ: ***T*** = 173,2 ***Н*** и ***Q*** = 199,991 ***Н***

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Свободное тело – это тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении. В противном случае тело называется **несвободным.**

Связывающие тело (связь) – это тело, которое ограничивает свободу движения данного твердого тела, делает его несвободным.

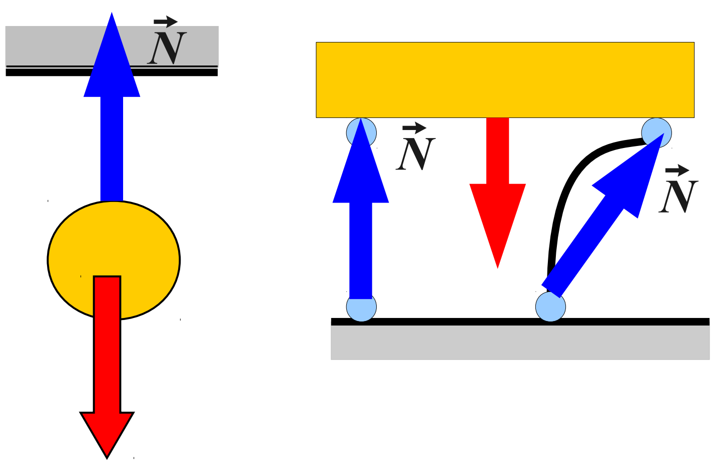
Реакции связи – это силы, которые действуют со стороны связи на несвободное тело.

Аксиома связей. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ПЛОСКИХ СВЯЗЕЙ

1. Нить (гибкий элемент)

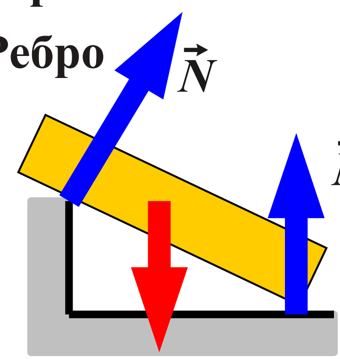
2. Невесомый стержень



Реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню).

3. Абсолютно гладкая поверхность

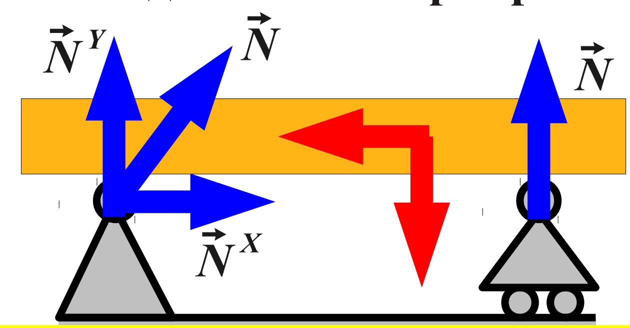
4. Ребро



Реакция гладкой поверхности направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи.

5. Неподвижный шарнир

6. Подвижный шарнир

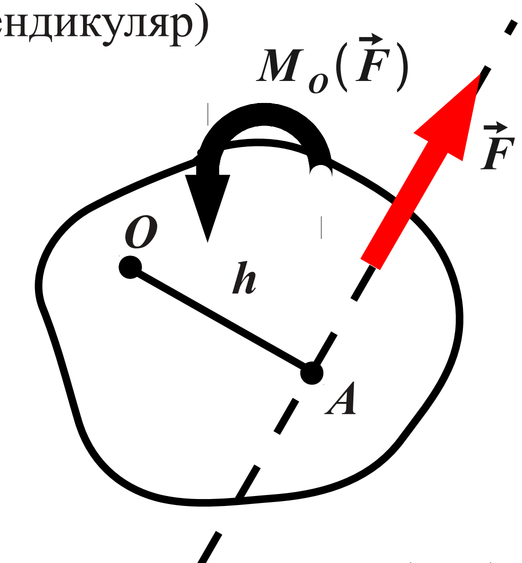


Реакция неподвижного шарнира имеет произвольное направление (разлагается на горизонтальную и вертикальную компоненты).

Реакция подвижного шарнира перпендикулярна плоскости опоры.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ СИЛЫ

Плечо силы ***F*** относительно точки ***O*** – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки ***O*** до линии действия силы

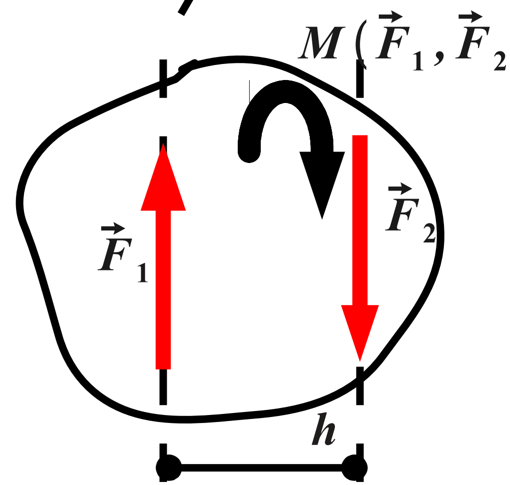


Алгебраический момент силы ***F*** относительно точки ***O*** – это положительное или отрицательное произведение величины силы на плечо

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

Знак «+» соответствует повороту тела под воздействием силы против часовой стрелки относительно точки ***O***, знак «–» соответствует повороту по часовой стрелки

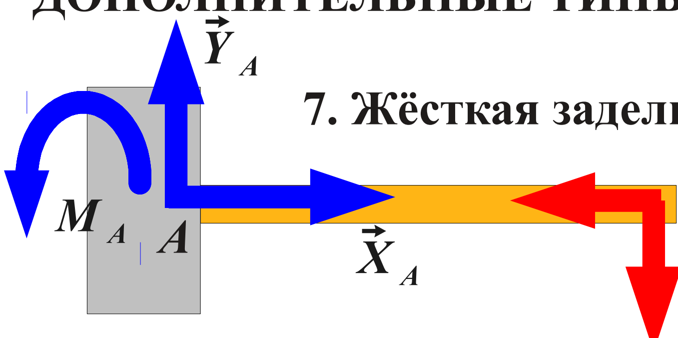
Пара сил – это система двух равных по модулю, параллельных и противоположных по направлению сил



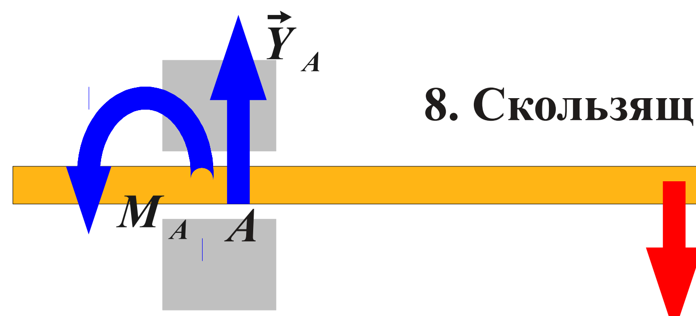
Алгебраический момент пары сил – это величина, численно равная произведению одной из сил на плечо пары сил:

$$M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F_1 \cdot h$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТИПЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИЙ

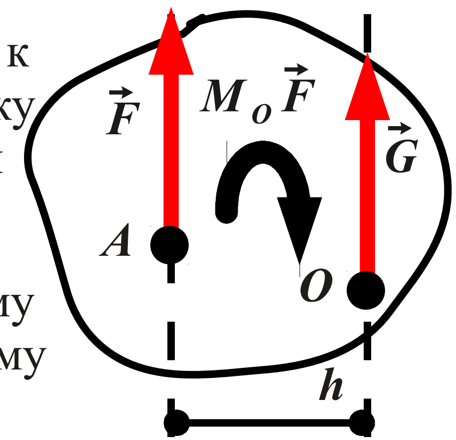


7. Жёсткая заделка



8. Скользящая заделка

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ



Теорема 1 (Пуансо). Состояние тела не изменится, если приложенную к нему силу ***F*** перенести параллельно самой себе из исходной точки ***A*** в точку ***O*** и добавить к ней пару сил с моментом, который равен моменту исходной силы ***F*** относительной новой точки ***O***.

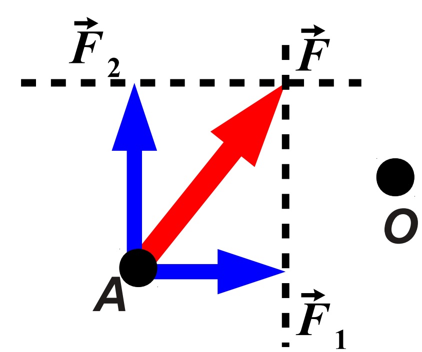
Следствие. Теорему Пуансо можно обобщить на произвольную систему сил, которая воздействует на тело. Систему сил при приведении к заданному центру ***O*** можно заменить одной силой ***R***, которая равна геометрической сумме всех исходных сил, и одной парой сил с моментом M_O, который равен сумме моментов всех исходных сил относительно точки ***O***.

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\ldots+\vec{F}_n=0 \qquad R^X=F_1^X+\ldots+F_n^X=0 \qquad R^Y=F_1^Y+\ldots+F_n^Y=0$$

$$M_O=M_O(\vec{F}_1)+M_O(\vec{F}_2)+\ldots+M_O(\vec{F}_n)$$

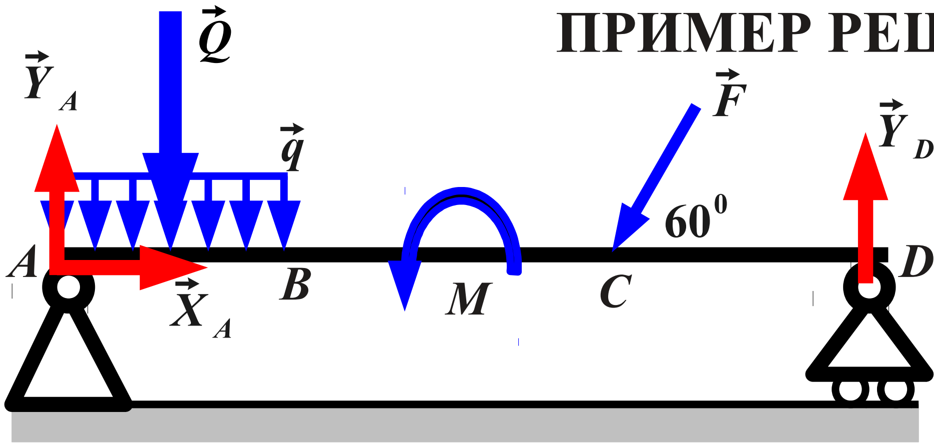
Теорема 2 (Вариньона) Пусть систему сил $F_1,\ldots, F_n$ можно заменить равнодействующей ***F***. Тогда момент равнодействующей относительно точки ***O*** равен сумме моментов системы исходных сил относительно той же точки ***O***.



$$\vec{F}=\vec{F}_1+\ldots+\vec{F}_n \Rightarrow M_O(\vec{F})=M_O(\vec{F}_1)+\ldots+M_O(\vec{F}_n)$$

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



Дано: q = 2 Н/м; F = 4 Н; M = 2 Н•м
AB = 2 м, BC = 3 м, CD = 2 м

Найти: реакции опор.

Решение

$$Q = q \cdot AB = 2 \cdot 2 = 4\ H$$

$$\vec{R} = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{F} + \vec{Y}_D = 0$$

$$M_C = M_C(\vec{Y}_A) + M_C(\vec{Q}) + M_C(\vec{Y}_D) + M = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$R^X = X_A - F \cdot \cos 60^0 = 0$$

$$R^Y = Y_A - Q - F \cdot \sin 60^0 + Y_D = 0$$

$$M_C(\vec{Y}_A) + M_C(\vec{Q}) + M_C(\vec{Y}_D) + M = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$X_A = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ H$$

$$\Rightarrow \quad Y_A + Y_D = 4 + 4 \cdot 0{,}866 = 7{,}464$$

$$-5 \cdot Y_A + 4 \cdot Q + 2 \cdot Y_D + 2 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$Y_A + Y_D = 7{,}464$$

$$-5 \cdot Y_A + 2 \cdot Y_D = -18$$

$$\Rightarrow$$

$$Y_A = 4{,}704\ H$$

$$Y_D = 2{,}760\ H$$

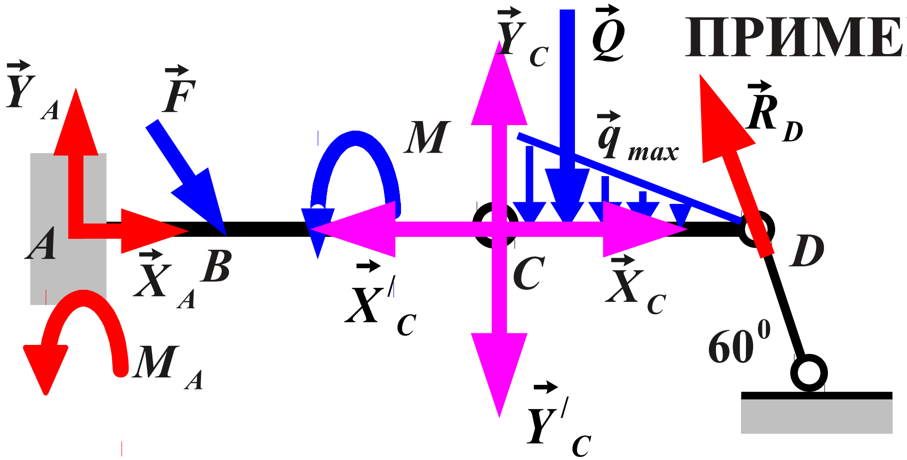
$$X_A = 2{,}00\ H$$

Проверка

$$M_A = M_A(\vec{Q}) + M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{Y}_D) + M = -Q \cdot \left(\frac{AB}{2}\right) - AC \cdot F \cdot \sin 60^0 + 7 \cdot Y_D + 2 =$$

$$= -4 - 5 \cdot 4 \cdot 0{,}866 + 7 \cdot 2{,}760 + 2 = 0$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



Дано: q_{max} = 2 Н/м; F = 4 Н; M = 2 Н•м
AB = 1 м, BC = 3 м, CD = 2 м, α = 45.

Найти: реакции опор.

Решение $\quad Q = 0{,}5 \cdot q_{max} \cdot CD = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2\ H$

Точка приложения силы Q – на расстоянии 1/3 от точки C

Уравнения равновесия для левой части:

$$R^X = X_A + F \cdot \cos 45^0 + X_C = 0$$

$$R^Y = Y_A - F \cdot \sin 45^0 + Y_C = 0$$

$$M_B = -AB \cdot Y_A + BC \cdot Y_C + M + M_A = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_A + X_C = -2{,}828 \qquad Y_A + Y_C = 2{,}828 \qquad -Y_A + 3 \cdot Y_C + M_A = -2$$

Уравнения равновесия для правой части:

$$R^X = -X_C - R_A \cdot \cos 60^0 = 0$$

$$R^Y = -Y_C + R_A \cdot \sin 60^0 - Q = 0$$

$$M_D = +CD \cdot Y_C + \frac{2}{3} \cdot Q \cdot CD = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_C = -0{,}5 \cdot R_A \qquad Y_C = 0{,}866 \cdot R_A - 2 \qquad Y_C = \frac{-4}{3} = -1{,}333$$

$$\Rightarrow \quad X_C = -0{,}385 \qquad R_A = 0{,}770 \qquad Y_C = \frac{-4}{3} = -1{,}333$$

$$\Rightarrow \quad X_A = -2{,}443 \qquad Y_A = 4{,}161 \qquad M_A = 6{,}160$$

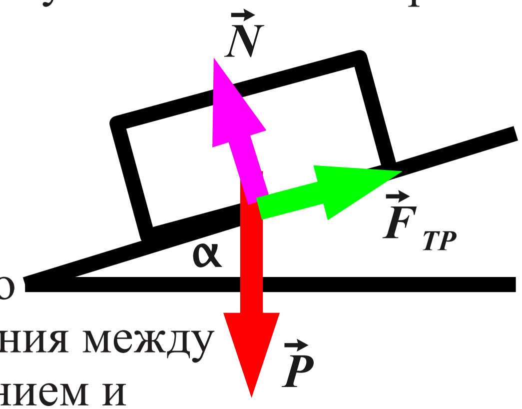
Проверка: $M_C = -4 \cdot Y_A + 3 \cdot F \cdot 0{,}707 - 2 \cdot Q/3 + R_A \cdot \sin 60^0 + M + M_A =$

$$= -4 \cdot 4{,}161 + 3 \cdot 4 \cdot 0{,}707 - 2 \cdot 2/3 + 0{,}770 \cdot 0{,}866 + 2 + 6{,}160 =$$

$$= -16{,}644 + 8{,}484 - 1{,}333 + 0{,}667 + 2 + 6{,}160 = -0{,}666$$

СИЛА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ, СИЛА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Сила трения скольжения – сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого.



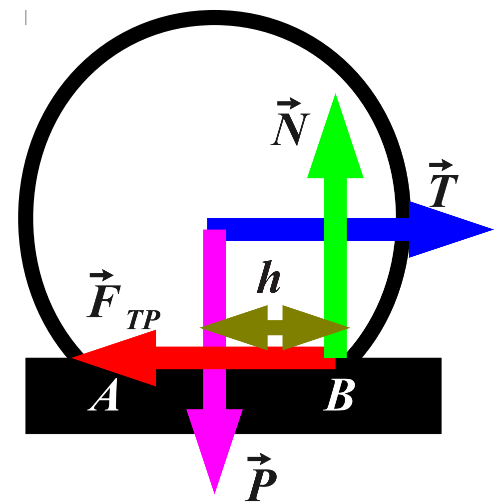
Экспериментально установлено, что максимальное значения силы трения определяется по **закону Кулона**:

$F_{mp} = f \cdot N$ f – коэффициент трения скольжения; N – реакция опоры.

Коэффициент трения f определяется из равенства $f = \mathrm{tg}\,\alpha$, где α – это угол между горизонтальной поверхностью и парой тел, коэффициент трения между которыми необходимо найти; также это и угол между нормальным давлением и равнодействующей нормального давления и силы трения.

Трение качение – это сила сопротивления, которая возникает при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим колесо радиуса R и веса P, который лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. Приложим в оси колеса силу T. Так как тела деформируются, то касание колеса и поверхности происходит не в одной точке, а на некотором отрезке AB. Интенсивность давления в точке A будет убывать, а в точке B нарастать, поэтому реакция N будет не в середине отрезка AB, а в его крайней точке – B.
В этой же точке будет приложена сила трения $F_{\text{ТР}}$. Таким образом, появляются две пары сил: (T, $F_{\text{ТР}}$) и (N, P). Составим уравнения равновесия.

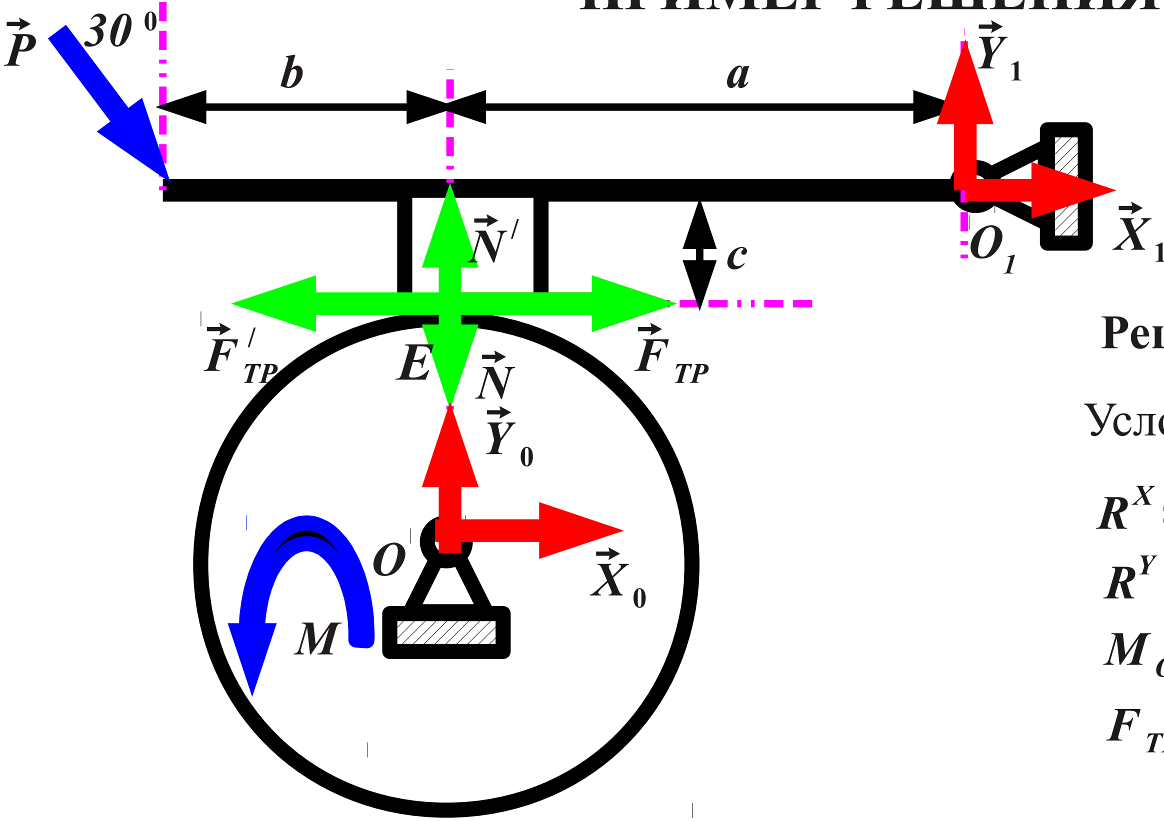


$$R^X = T - F_{TP} = 0 \qquad T = F_{TP}$$
$$R^Y = N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P$$
$$\sum M = N \cdot h - T \cdot R = 0 \qquad h = \frac{T \cdot R}{N}$$

Если $T \to \infty$, то $h \to \infty$, что соответствует прокручиванию колёс на месте

Коэффициент трения качения – предельное значение расстояния $h = \delta$, при котором нарушается равновесие.

СИЛА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ, СИЛА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



Дано: $R = 0{,}1$ м; $M = 10$ кН·м; $a = 1$ м; $b = 0{,}5$ м; $c = 0{,}3$ м; $f = 0{,}4$ м.

Найти: силу P, реакции опор.

Решение:

Условия равновесия для колеса имеют вид:

$$R^X = X_0 + F_{TP} = 0$$
$$R^Y = Y_0 - N = 0$$
$$M_O = -R \cdot F_{TP} + M = 0$$
$$F_{TP} = 0{,}4 \cdot N$$

$$\Rightarrow \quad F_{TP} = \frac{M}{R} = 100, \quad X_0 = -F_{TP} = -100, \quad N = \frac{F_{TP}}{0{,}4} = 250, \quad Y_0 = N = 250$$

Условия равновесия для тормозной колодки имеют вид:

$$R^X = X_1 - F_{TP} + P \cdot \sin 30^0 = 0$$
$$R^Y = Y_1 + N - P \cdot \cos 30^0 = 0$$
$$M_{O_1} = -c \cdot F_{TP} + (a+b) \cdot P \cdot \cos 30^0 - a \cdot N = 0$$

$$P = \frac{c \cdot F_{TP} + a \cdot N}{(a+b) \cdot \cos 30^0} = \frac{0{,}3 \cdot 100 + 250}{0{,}866 \cdot 1{,}5} = 215{,}550$$

$$\Rightarrow X_1 = F_{TP} - P \cdot \sin 30^0 = 100 - 215{,}550 \cdot 0{,}5 = -7{,}775$$

$$Y_1 = -N + P \cdot \cos 30^0 = -250 + 215{,}550 \cdot 0{,}866 = -63{,}334$$

Проверка $M_E = M_E(\vec{P}) + M_E(\vec{X}_0) + M_E(\vec{X}_1) + M_E(\vec{Y}_1) + M =$

$$= b \cdot P \cdot \cos\alpha - c \cdot P \cdot \sin\alpha + R \cdot X_0 - c \cdot X_1 + a \cdot Y_1 + M =$$

$$= 0{,}5 \cdot 215{,}550 \cdot 0{,}866 - 0{,}3 \cdot 215{,}550 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 7{,}775 - 63{,}334 + 10 = -0{,}0001 \approx 0$$

РАЗДЕЛ II

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Движение — это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени

ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1) Векторный способ. Положение точки M определяется радиус-вектором, который соединяет начало координат O и точку M в каждый момент времени:

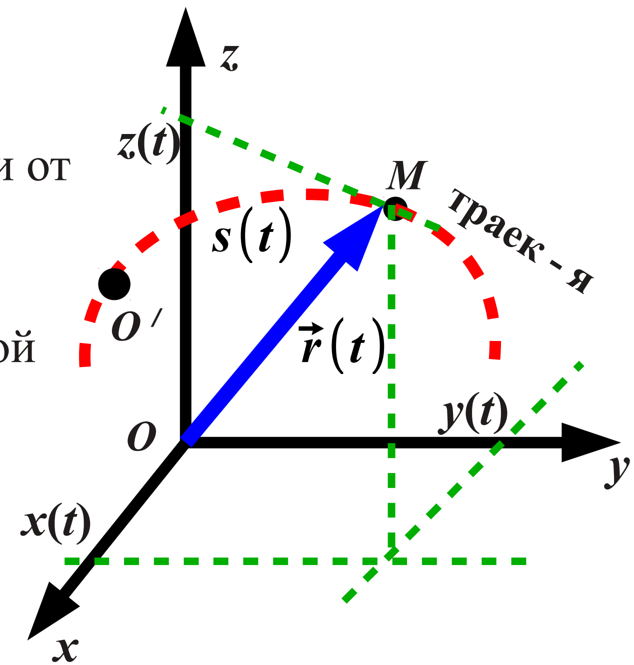
$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k} \quad (1)$$

2) Координатный способ. Положение точки M определяется координатами, которые меняются по некоторым законам в зависимости от времени:

$$x=x(t) \quad y=y(t) \quad z=z(t) \quad (2)$$

3) Естественный способ. Положение точки M определяется расстоянием, которое прошла точка вдоль траектории от фиксированной точки траектории $O^{/}$ в зависимости от времени:

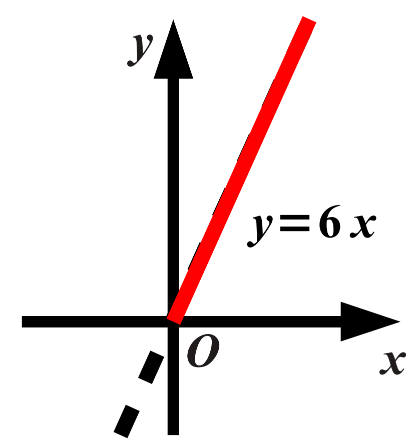
$$s=s(t) \quad (3)$$



Существует **взаимосвязь** между координатным и естественным способами задания движения

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{(x^{/})^2+(y^{/})^2+(z^{/})^2}\,dt \quad (4)$$

Пример: дан закон движения точки. Необходимо определить траекторию движения и закон движения в естественной форме $x=2\cdot t\,;\,y=12\cdot t$



Решение:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=12t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2} \\ y=6x \end{cases}$$

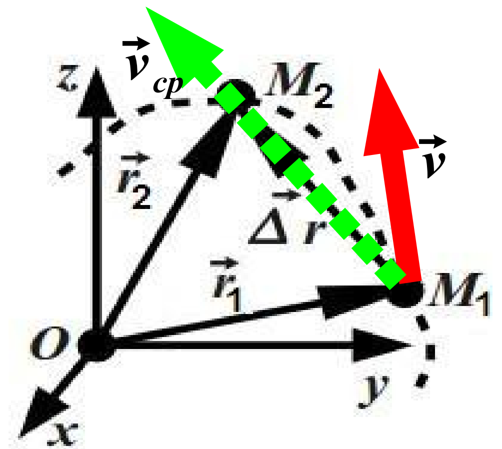
Следовательно, траектория движения точки — прямая

$$x^{/}=2; \quad y^{/}=12 \Rightarrow s(t)=\int_0^t\sqrt{148}\,dt=12{,}166\,t$$

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Средняя скорость – векторная величина, равная отношению вектора перемещения за некоторый промежуток времени к этому промежутку времени

$$(1) \quad \vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



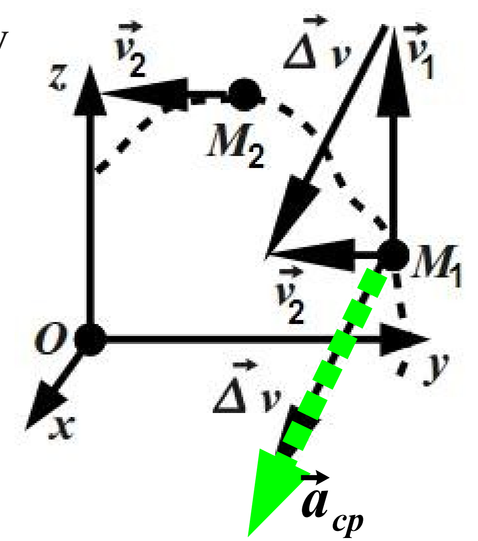
Скорость – векторная величина, которая равна средней скорости за бесконечно малый промежуток времени

$$(2) \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{cp} = (\vec{r})'$$

$$(3) \quad v_x = x'(t) \quad v_y = y'(t) \quad v_z = z'(t) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Среднее ускорение – векторная величина, равное отношению вектора приращения скорости за некоторый промежуток времени к этому промежутку времени:

$$(4) \quad \vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



Ускорение – векторная величина, которая равна среднему ускорению за бесконечно малый промежуток времени

$$(5) \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = (\vec{v})' = (\vec{r})''$$

$$(6) \quad a_x = v_x' = x''(t) \quad a_y = v_y' = y''(t) \quad a_z = v_z' = z''(t) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ (продолжение)

Записанные формулы применяются, если движение определяется в векторной или координатной форме. Запишем формулы для естественного закона движения $s = s\,(t)$.

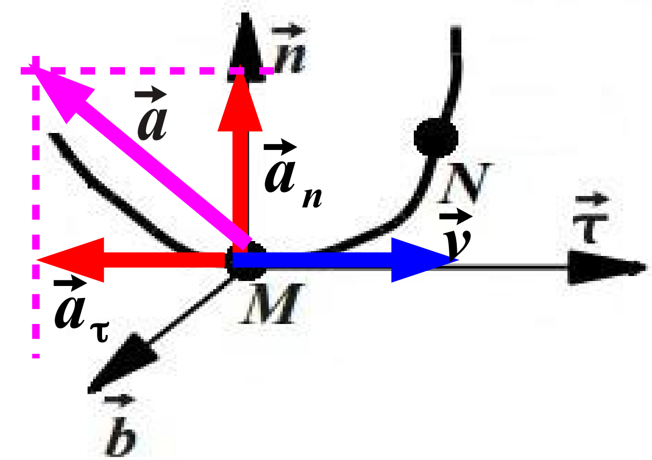
Mτnb – система координат, которая связана с точкой ***M*** и перемещается вместе с ней вдоль траектории

Mτ – касательная к графику функции; ***Mn*** – нормаль к графику функции;

Mb – бинормаль к графику функции

Вектор и величина скорости определяется по формулам:

$$\textbf{(7)} \quad \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v_\tau \qquad v_\tau = s'(t)$$



Соприкасающаяся окружность – это окружность, которая совпадает с кривой в некоторой окрестности выбранной точки.

Радиус этой окружности называется **радиусом кривизны** ρ кривой в выбранной точке.

Вектор и величина ускорения определяется по формулам:

$$\textbf{(8)} \quad \vec{a} = \vec{\tau} \cdot a_\tau + \vec{n} \cdot a_n \qquad a_\tau = v' = s''(t) \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$\vec{a}_n \quad \vec{a}_\tau$ – нормальное и касательное ускорения, м/с^2 $\qquad$ ρ – радиус кривизны, м

Касательное ускорение отражает изменение величины скорости в зависимости от времени

Нормальное ускорение отражает изменение кривизны кривой при заданной скорости

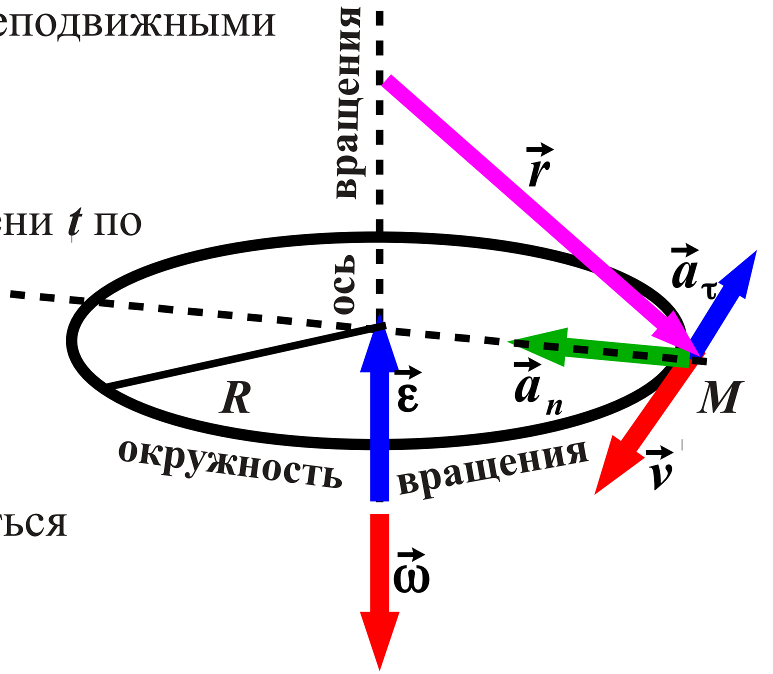
$$\textbf{(9)} \quad a_\tau = \frac{a_x \cdot v_x + a_y \cdot v_y + a_z \cdot v_z}{v}$$

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Поступательное движение твёрдого тела – это движение, при котором любой участок тела при перемещении остаётся параллельным самому себе

Теорема 1. При поступательном движении все точки двигаются по одинаковым траекториям и имеют в каждый момент времени равные по модулю скорости и ускорения.

Вращательное движение твёрдого тела – это движение, при котором по крайней мере две точки тела остаются во всё время движения неподвижными и образуют ось его вращения



Вращательное движение и его кинематические характеристики определяются величиной угла поворота в зависимости от времени t по формулам

$$(1)\quad \varphi=\varphi(t) \quad \omega=\varphi'(t) \quad \varepsilon=\omega'(t)=\varphi''(t)$$

Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения так, что если смотреть из его начальной точки, то тело будет вращаться по часовой стрелке (правило правого винта)

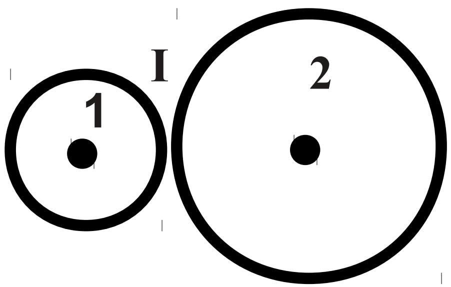
$$(2)\quad v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega \qquad \vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

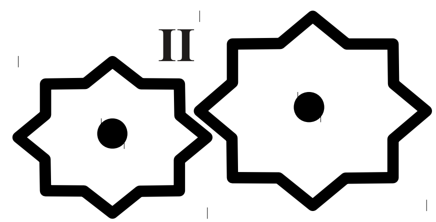
Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения и сонаправлен с вектором угловой скорости, если вращение ускоренное, и противоположно направлен, если вращение замедленное

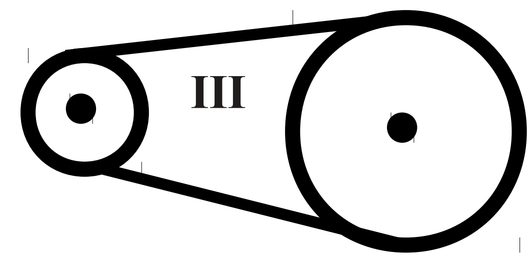
$$(3)\quad a_\tau=\frac{dv}{dt}=R\cdot\varepsilon \quad a_n=\frac{v^2}{R}=R\cdot\omega^2 \quad \vec{a}_\tau=\vec{\varepsilon}\times\vec{r} \quad \vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{v}$$

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА (продолжение)

Передаточный механизм – это механизм, который передаёт вращение от ведущего колеса к ведомому Существуют три основных типа передаточных механизмов:
I) фрикционный, II) зубчатый, III) ременной





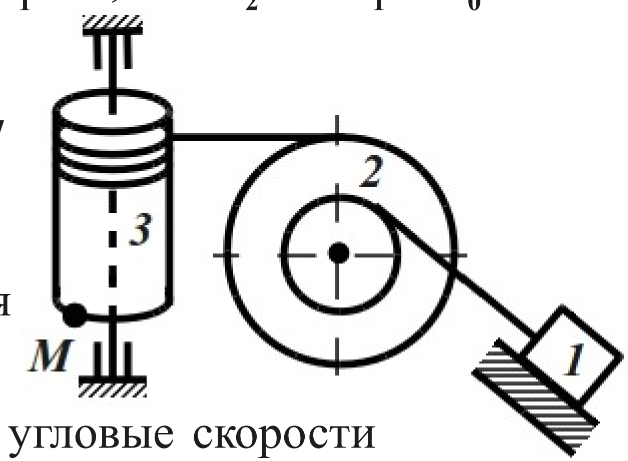


$i = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{z_2}{z_1}$ – передаточное число

ω_k-- угловая скорость, r_k — радиусы вращения, z_k – число зубцов

Пример. Дано $R_2 = 30$; $r_2 = 15$; $R_3 = 20$; $x_0 = 10$; $v_0 = 7$; $x_2 = 128$; $t_2 = 2$; $t_1 = 1$; $x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$

Найти: скорость и ускорение точки M в момент времени t_1.



Решение. $x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$; $x(0) = c_0 = x_0 = 10$; $v(0) = x'(0) = c_1 = v_0 = 7$

$x(t_2) = x_2 \Rightarrow 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 4c_2 + 14 + 10 = 128 \Rightarrow c_2 = 26$ Таким образом,

закон движения тела 1 имеет вид $x_1 = 26t^2 + 7t + 10$, скорость меняется по закону $v_1 = 52t + 7$, а ускорение – $a_1 = 52$

Запишем уравнения, которые связывают скорость движения груза и угловые скорости колеса и цилиндра:. $v_1 = r_2\omega_2$; $R_2\omega_2 = R_3\omega_3$

Тогда $\omega_3 = \dfrac{R_2\omega_2}{R_3} = \dfrac{R_2 v_1}{R_3 r_2} = 5{,}9$; $\omega_3 = \dfrac{R_2 a_1}{R_3 r_2} = 5{,}2$

Откуда $v_M = R_3\omega_3 = 118$ $\quad a = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = 703{,}9$

$a_M^n = R_3\omega_3^2 = 696{,}2$ $\quad a_M^\tau = R_3\varepsilon_3 = 104$

Плоское движение тела – это движение, при котором все точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости

Плоское движение тела эквивалентно движению отрезка ***AB*** и раскладывается на два типа движения: поступательное движение точки ***A*** (полюса) и вращательное движение отрезка ***AB*** вокруг полюса.

В векторной форме уравнение движения и скорость отдельных точек определяются по следующим общим формулам:

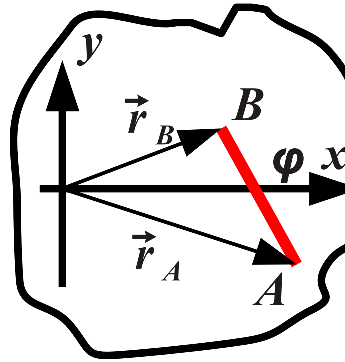
(1) $x_A = x(t)$

(2) $y_A = y(t)$

(3) $\varphi_{AB} = \varphi(t)$

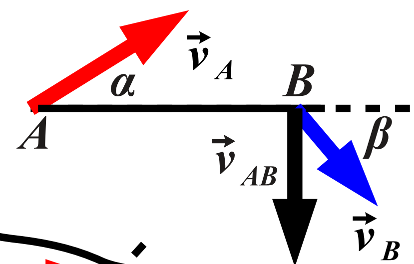
(4) $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$

(5) $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$



Теорема о проекциях. Проекции векторов скоростей двух точек на общую ось равны между собой.

(6) $v_A \cdot \cos(\alpha) = v_B \cdot \cos(\beta)$



Мгновенный центр вращения – точка плоскости, скорость которой в ***данный момент*** времени равна нулю.

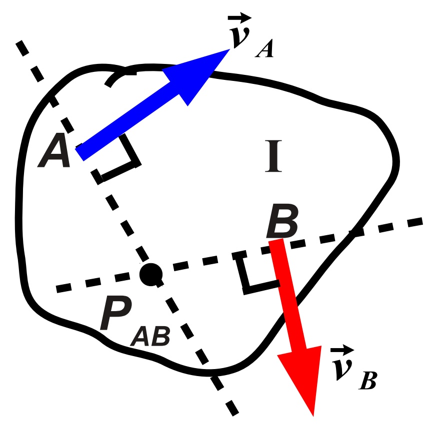
СПОСОБЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ МЦВ

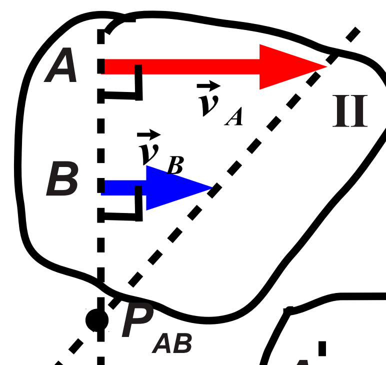
Если в качестве полюса вращения ***A*** выбрать МЦВ $\boldsymbol{P_{AB}}$, то формула 4 упрощается к виду

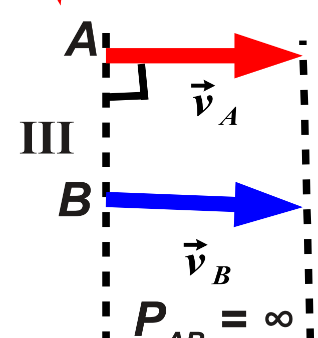
(7)
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB} = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP} = \vec{v}_{BP}$$
$$v_B = v_{PB} = \omega_{PB} \cdot PB = \omega_{AB} \cdot PB$$

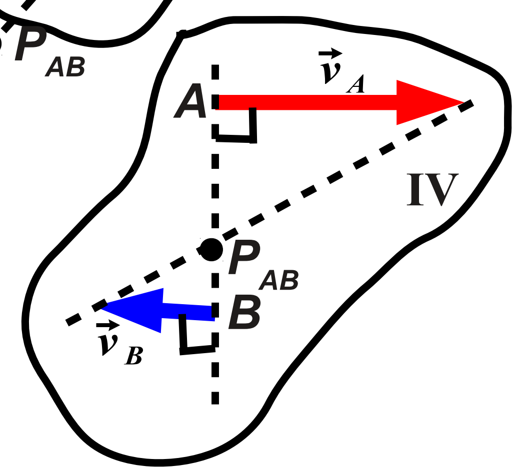
где $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ – угловая скорость вращения отрезка ***AB*** вокруг МЦВ $\boldsymbol{P_{AB}}$;

PB – расстояние от точки ***B*** до МЦВ $\boldsymbol{P_{AB}}$.

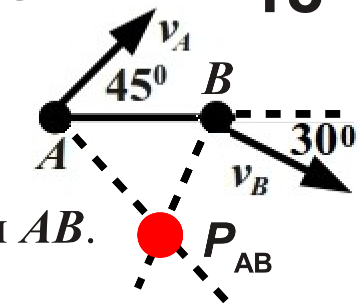








ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. ПРИМЕРЫ НА СКОРОСТЬ



Пример 1. Палка ***AB*** длиной 0,5 метра летит параллельно плоскости рисунка. Известны направления скоростей точек ***A*** и ***B***, кроме того известна величина скорости точки ***A*** 3 м/с. Найти скорость точки ***B***, угловую скорость вращения палки ***AB***.

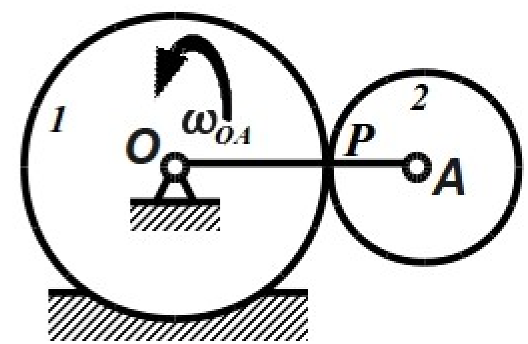
Решение. Применим формулу (6). $v_A \cdot \cos(45^0) = v_B \cdot \cos(30^0) \Rightarrow v_B = \dfrac{0{,}707 \cdot v_A}{0{,}866} = 2{,}449$ м/с

Применим формулу (7). Найдём расстояние от точек ***A*** и ***B*** до МЦВ P_{AB} по теореме синусов:

$$AP_{AB} = \frac{AB \sin 60^0}{\sin 75^0} = \frac{0{,}866 \cdot 0{,}5}{0{,}966} = 0{,}448 \quad BP_{AB} = \frac{AB \sin 45^0}{\sin 75^0} = \frac{0{,}707 \cdot 0{,}5}{0{,}966} = 0{,}366$$

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{3}{0{,}448} = 6{,}696 \quad 1/\text{с} \qquad v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 6{,}696 \cdot 0{,}366 = 2{,}451 \ \text{м/с}$$

Ответ: 2,45 м/с ; 6,696 1/с



Пример 2. Колесо 2 катится по неподвижному колесу 1. Механизм приводится в действие кривошипом ***OA*** с угловой скоростью **20** 1/с. Радиусы первого и второго колеса **0,3** и **0,1** м. Найти угловую скорость второго колеса.

Решение. Колесо катится без скольжения, поэтому МЦВ – точка касания колес. Запишем необходимые формулы.

Если рассматривать точку ***A***, как часть колеса 2, то $v_A = \omega_2 \cdot AP = \omega_2 \cdot r_2 = 0{,}1 \cdot \omega_2$

Если же рассматривать точку ***A***, как кривошипа ***OA***, то $v_A = OA \cdot \omega_{OA} = (r_1 + r_2) \cdot \omega_{OA} = 0{,}4 \cdot 20 = 8$ м/с

Отсюда $\omega_2 = \dfrac{8}{0{,}1} = 80$ 1/с

Ответ: 80 1/с

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА. УСКОРЕНИЕ

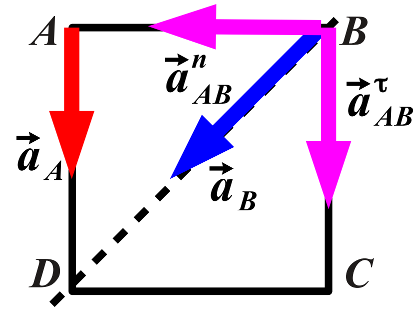
Ускорение отдельных точек определяются по следующей общей формуле: **(8)** $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}$

Запишем развёрнутую формулу с учётом криволинейного движения точки ***A*** и вращательного движения отрезка ***AB*** **(9)** $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} = \vec{a}^{\,n}_A + \vec{a}^{\,\tau}_A + \vec{a}^{\,n}_{AB} + \vec{a}^{\,\tau}_{AB}$

Дальнейшее решение заключается в проектировании равенства (9) на оси координат и решения полученной системы уравнений. Для **проверки** полученного решения можно использовать понятие **мгновенного центра ускорений** (МЦУ) – точки, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Приведём **алгоритм поиска МЦУ**

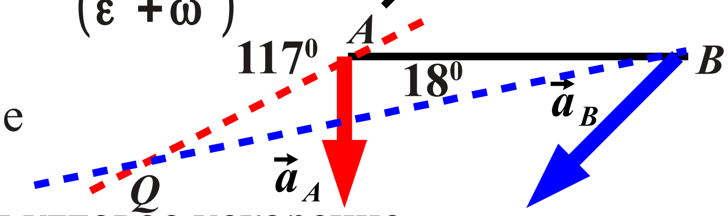
1) Определить угол поворота μ из соотношения (10) **(10)** $tg\,\mu = \varepsilon / \omega^2$



2) Определить направление ускорения выбранной точки. Повернуть этот вектор вокруг этой точки на угол μ в сторону направления углового ускорения ε

(11) $L = \dfrac{a}{(\varepsilon^2 + \omega^4)^{1/2}}$

3) Вдоль полученного направления отложить отрезок ***L***, длина которого определяется по формуле (11)



Пример. Квадрат ***ABCD*** со стороной **2** см совершает плоское движение. В данный момент времени ускорения вершин ***A*** и ***B*** равны **2** и **5,657** см/с^2 соответственно. Найти угловую скорость и угловое ускорение квадрата.

Решение. Найдём проекции векторов из уравнения $\vec{a}_B = \vec{a}^{\,n}_A + \vec{a}^{\,\tau}_A + \vec{a}^{\,n}_{AB} + \vec{a}^{\,\tau}_{AB}$ $\begin{cases} -a_B \cdot 0{,}707 = 0 - a^n_{AB} \\ -a_B \cdot 0{,}707 = -a_A - a^\tau_{AB} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5{,}657 \cdot 0{,}707 = -\omega^2_{AB} \cdot AB = -\omega^2_{AB} \cdot 2 \\ -5{,}657 \cdot 0{,}707 = -2 - \varepsilon_{AB} \cdot AB = -2 - \varepsilon_{AB} \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \omega_{AB} = 1{,}414\,;\ \varepsilon_{AB} = 1$$

Проверка $tg\,\mu = \varepsilon_{AB} / \omega^2_{AB} = 1/2 \Rightarrow \mu = 26{,}565^0$ $AQ = \dfrac{a_A}{(\varepsilon^2_{AB} + \omega^4_{AB})^{1/2}} = \dfrac{2}{2{,}236} = 0{,}894$ $BQ = \dfrac{5{,}657}{2{,}236} = 2{,}529$

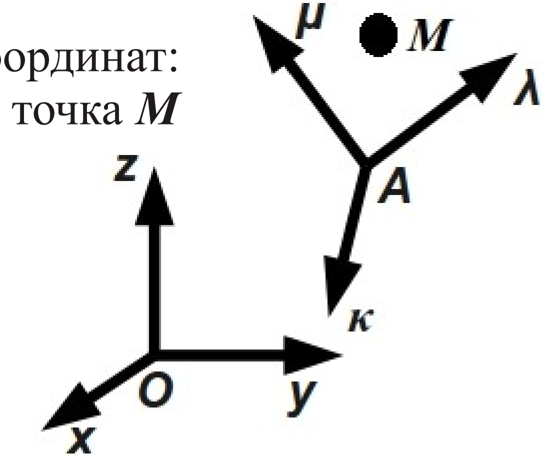
По теореме синусов из ***ABQ*** $\dfrac{\sin 18^0}{AQ} = \dfrac{\sin 45^0}{AB} \Rightarrow AQ = 0{,}874$ $\dfrac{\sin 117^0}{BQ} = \dfrac{\sin 45^0}{AB} \Rightarrow BQ = 2{,}521$

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Точка совершает **сложное движение**, если она участвует в двух и более движениях.

Примеры. Движение лодки по реке; движение человека по эскалатору

Пусть точка ***M*** совершает **два** движения. Тогда определим **две** системы координат: неподвижную **Oxyz** и подвижную **Aκλμ**, относительно которых движется точка ***M***



Относительное движение – движение точки ***M*** по отношению к подвижной системе координат **Aκλμ**

Переносное движение – движение подвижной системы координат **Aκλμ** по отношению к неподвижной системе координат **Oxyz**.

Абсолютное движение – движение точки ***M*** по отношению к неподвижной системе координат **Oxyz**.

Кинематические характеристики сложного движения определяются по двум основным формулам (1) и (2).

(1) $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

(2) $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K$

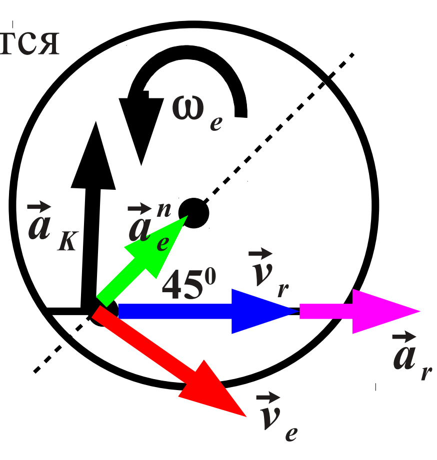
«e» – переносное движение; **«r»** – относительное движение; **«K»** – ускорение Кориолиса

Ускорение Кориолиса возникает в том случае, когда подвижная система координат совершает вращательное движение вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω_e..и определяется по формулам (3) и (4)

(3) $\vec{a}_K = 2\cdot(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$

(4) $a_K = 2\cdot\omega_e\cdot v_r\cdot\sin(\varphi)$

Пример. Точка ***M*** движется по хорде диска со скоростью **0,5*t** м/с. Диск вращается со скоростью **0,5** 1/с. Определить абсолютные скорость и ускорение в момент времени **2** с, если ***OM*** равно **0,02** м.



Решение. $v_r = 0{,}5\cdot 2 = 1$ $\quad v_e = OM\cdot\omega_e = 0{,}02\cdot 0{,}5 = 0{,}01$ $\quad v_a^2 = v_r^2 + v_e^2 + 2\cdot v_e\cdot v_r\cos(\varphi) =$

$= 1 + 0{,}0001 + 0{,}014 = 1{,}0015 \Rightarrow v_a = 1{,}014$ $\quad a_r = 0{,}5$ $\quad a_e^n = OM\cdot\omega_e^2 = 0{,}02\cdot 0{,}25 = 0{,}005$

$a_K = 2\cdot\omega_e\cdot v_r\cdot\sin(\varphi) = 2\cdot 0{,}5\cdot 1\cdot 1 = 1$ $\quad a_a^X = a_e^n\cdot\cos(45^0) + a_r = 0{,}504$

$a_a^Y = a_e^n\cdot\sin(45^0) + a_K = 1{,}004$ $\quad a_a = \sqrt{(a_a^X)^2 + (a_a^Y)^2} = \sqrt{0{,}254 + 1{,}007} = 1{,}123$

РАЗДЕЛ III

ДИНАМИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил

Закон 1 (инерции). Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит этого движения.

Инертность – это свойство материальной точки сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, мерой которого является **масса [кг]**.

Движение характеризуется векторной величиной Q, которая называется **количеством движения** и определяется равенством (1)

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v} \quad (1)$$

Закон 2. Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил

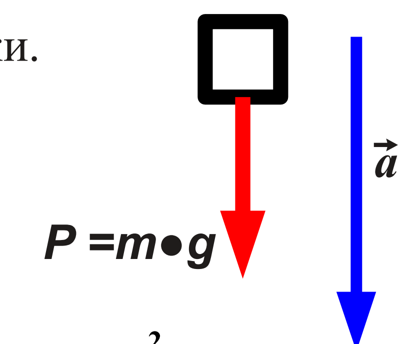
$$m*(\vec{v})' = \sum_k \vec{F}_k = \vec{F}$$
$$m*\vec{a} = \vec{F};\ m*a = F \quad (2)$$

Закон 3. Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, которая соединяет эти точки, в противоположные стороны.

Проектируя уравнения (2) на оси координат, получим систему дифференциальных уравнений вида (3)

$$\begin{cases} m*x'' = F_1^X + \ldots + F_n^X \\ m*y'' = F_1^Y + \ldots + F_n^Y \\ m*z'' = F_1^Z + \ldots + F_n^Z \end{cases} \quad (3)$$

Сформулируем две основные **задачи динамики**:
1) на основе закона движения точки определить действующую на нее силу;
2) зная совокупность действующих на точку сил, определить закон движения точки.



Пример 1. Найти уравнение движения под действием силы тяжести, если $\mathbf{v(0) = v_0}$, $\mathbf{s(0) = s_0}$

Решение. На тело действует одна сила $P = m*g$, которая направлена вниз. Направим также вниз ось координат(по направлению ускорения). Тогда по формуле (2)

$$m*v' = m*g \Rightarrow v' = g \Rightarrow v = \int g\,dt = g*t + C_1 \Rightarrow s' = g*t + C_1 \Rightarrow s = \frac{g*t^2}{2} + C_1*t + C_2 \Rightarrow s = \frac{g*t^2}{2} + v_0*t + s_0$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Существуют **две меры** воздействия силы на точку: **импульс** и **работа**

Элементарный импульс ***dp*** силы ***F*** за промежуток времени ***dt*** вычисляется по формуле

$$(1)\quad d\vec{p} = \vec{F} * dt \qquad [dp] = Н * с = \frac{кг * м}{с}$$

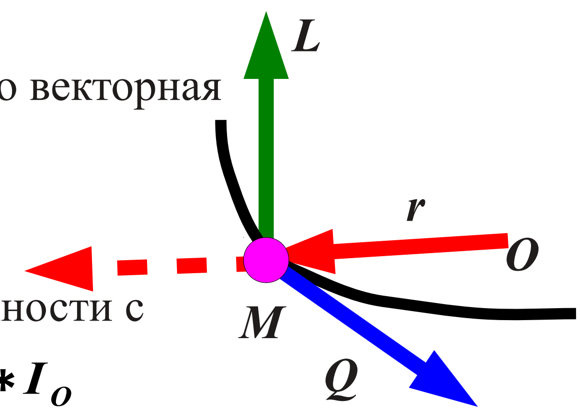
Полный **импульс** ***p*** силы ***F*** за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле

$$(2)\quad \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

Теорема 1. Изменение количества движения точки ***Q*** за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов S_k всех сил, которые действуют на точку за этот же промежуток времени и вычисляется по формуле (3).

$$(3)\quad m * \vec{v}_2 - m * \vec{v}_1 = \sum p_k = p$$

Момент количества движения (кинетический момент) точки ***M*** – это векторная величина ***L***, которая определяется по формуле (4)



$$(4)\quad \vec{L} = \vec{r} \times m \vec{*} v = \vec{r} \times \vec{Q}$$

Вычислим длину вектора ***L*** для важного частного случая движения по окружности с центром в точке ***O*** $\quad L = r * (m * v) * \sin(90^0) = r * m * \omega * r = \omega * m * r^2 = \omega * I_O$

Момент инерции точки ***M*** с массой **m** относительно точки ***O*** это скалярная величина, которая определяется по формуле (5) и является мерой инертности тела при вращательном движении

$$(5)\quad I_O = m * r^2$$

Теорема 2. Производная по времени от кинетического момента L_O, взятого относительно некоторой точки ***O***, равна моменту действующей на точку равнодействующей ***R*** всех сил относительно той же точки ***O***

$$(6)\quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{R})$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Элементарная работа силы F при перемещении точки M на бесконечно малое расстояние dS определяется по формуле **(7)**.

$$dA = \vec{F} * \vec{dS} = F_x * dx + F_y * dy + F_z * dz \quad (7)$$

На произвольном перемещении от точки M_0 до точки M_1 по формуле **(8)**

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} F_x * dx + F_y * dy + F_z * dz \quad (8)$$

Работа **силы тяжести** $P = m*g$ **(9)** $A_P = \pm P * h = P * (z_0 - z_1)$

Работа **силы упругости** $F_x = -k*x$, $F_y = F_z = 0$ **(10)** $A_y = -k * \int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{1}{2} * k * (x_0^2 - x_1^2)$

Работа **силы трения** F_{TP} **(11)** $A_{TP} = -F_{TP} * S$

z_0, z_1 – начальная и конечная аппликата точки M; x_0, x_1 – начальная и конечная деформация пружины; S – длина отрезка перемещения точки M.

Если под действием силы F или пары сил с моментом M_O точка перемещается вдоль окружности радиуса R с центром в точке O на **бесконечно малый угол** $d\varphi$, то работа этой силы или пары сил определяется по формуле **(12)**; если же поворот производится на **конечный угол**, то работа определяется по формулам **(13)** и **(14)**

$$(12)\quad dA = M_O * d\phi$$

$$(13)\quad A = \int_{\phi_0}^{\phi_1} M_O(\phi)\, d\phi$$

$$(14)\quad A = M_O * (\phi_1 - \phi_0)$$

Кинетическая энергия точки E – это скалярная величина, которая при поступательном движении определяется по формуле **(15)**, а при криволинейном по окружности – по формуле **(16)**

$$(15)\quad E = \frac{m * v^2}{2}$$

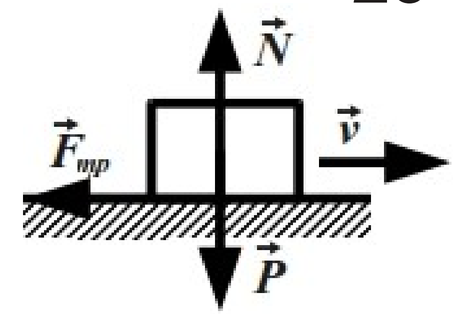
$$(16)\quad E = \frac{\omega^2 * I_O}{2}$$

Теорема 3. Изменение кинетической энергии точки при некотором её перемещении равно сумме работ всех сил, которые действуют на точку во время этого перемещения.

$$(17)\quad E_{II} - E_I = \sum_k A_k$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развилась сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равнялась 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.



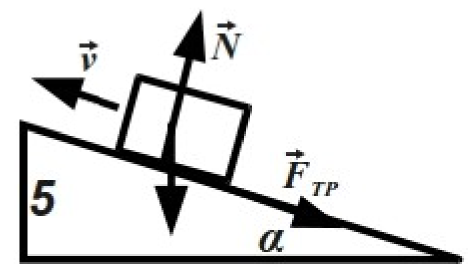
Решение. $F_{TP}=-0{,}1*P=-0{,}1*m*g=-m$ $\quad p_{TP}=\int_0^t F_{TP}dt=-m*\int_0^t dt=-m*t$

$m*v_1-m*v_0=-20*m$ Тогда время торможения определится из равенства $-m*t_{TOP}=-20*m\Rightarrow t_{TOP}=20$

Так как на тело действует постоянная сила торможения, то поезд движется с постоянным ускорением

$a=\dfrac{F_{TP}}{m}=-1$ Тогда $s=\dfrac{a*t^2}{2}+v_0*t+s_0=-\dfrac{t^2}{2}+20*t$ Откуда $s_{TOP}=-\dfrac{t_{TOP}^2}{2}+20*t_{TOP}=200$

Пример 2. Определить работу, которую надо затратить, чтобы поднять на 5 м тело массы 20 кг, двигая его по наклонной плоскости под углом в 30^0. Коэффициент трения 0,5. Найти силу, которую надо приложить, чтобы тело увеличило скорость с 0 до 3 м/с.



Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести P, сила реакции опоры N; сила трения F_{TP} . Для того, чтобы тело начало перемещаться, надо приложить силу, работа которой равна работе всех трёх указанных сил. Так как сила N перпендикулярна S, то эта сила не совершает работу. Тогда для оставшихся сил получим $P=m*g=200$ $\quad F_{TP}=0{,}5*N=0{,}5*P*\cos\alpha=0{,}5*m*g*\cos(30^0)=86{,}6$

Работа сил на перемещении S = **10** м равна $A_{TP}=-F_{TP}*S=-866$ $\quad A_P=-P*h=-200*5=-1000$

Тогда A = – **1866** Дж

Для решение второй задачи применим теорему об изменении кинетической энергии $E_{II}-E_I=\sum_k A_k$

$E_{II}=\dfrac{m*v_2^2}{2}=\dfrac{20*9}{2}=90$ $\quad E_I=\dfrac{m*v_1^2}{2}=\dfrac{20*0}{2}=0$ $\quad \sum_k A_k=-1866+T*S=10*T-1866$

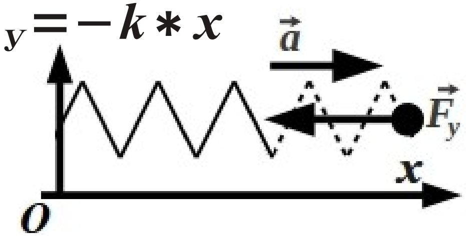
Тогда $90=10*T-1866\Rightarrow T=195{,}6$ Н

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Существуют **два** основных **вида** колебаний точки: **1) СВОБОДНЫЕ; 2) ВЫНУЖДЕННЫЕ**

1) СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ – это колебания, которые происходят под действием внутренних сил, например, восстанавливающей силы пружины.

а) Не вязкая среда Второй закон Ньютона $m * x'' = \vec{F}_y$ Закон Гука $F_y = -k * x$

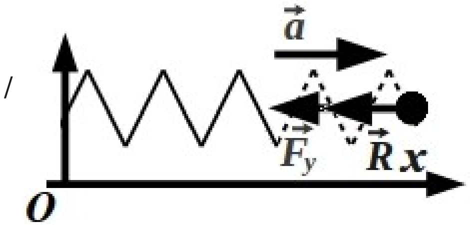


Дифференциальное уравнение **(1)** $m * x'' + k * x = 0 \Rightarrow x'' + \lambda^2 * x = 0$

и его решение **(2)** $x = C_1 * \sin(\lambda * t) + C_2 * \cos(\lambda * t) = A * \sin(\lambda * t + \alpha)$

A — амплитуда колебаний; ***λ*** — частота колебаний; ***α*** — начальная фаза колебаний

б) Вязкая среда Если точка ***M*** перемещается в **вязкой** среде, то на неё действует сила, которая пропорциональна скорости перемещения: $\vec{R} = -\mu * \vec{v} = -\mu * \vec{x}'$

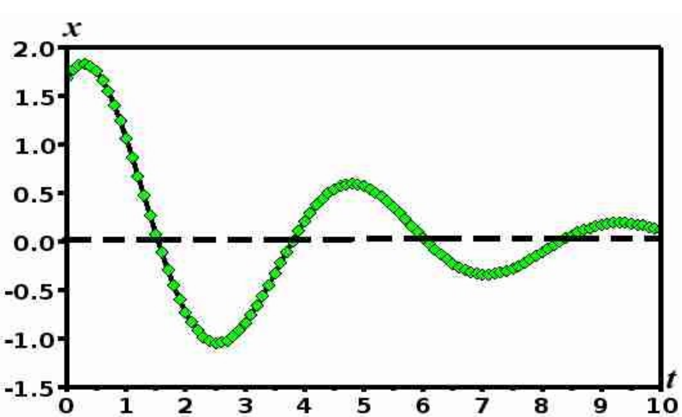


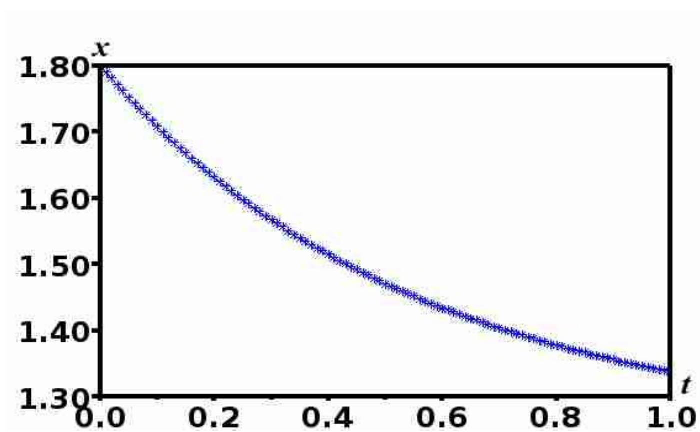
Дифференциальное уравнение **(3)** $m * x'' + k * x + \mu * x' = 0 \Rightarrow x'' + 2 * b * x' + \lambda^2 * x = 0$

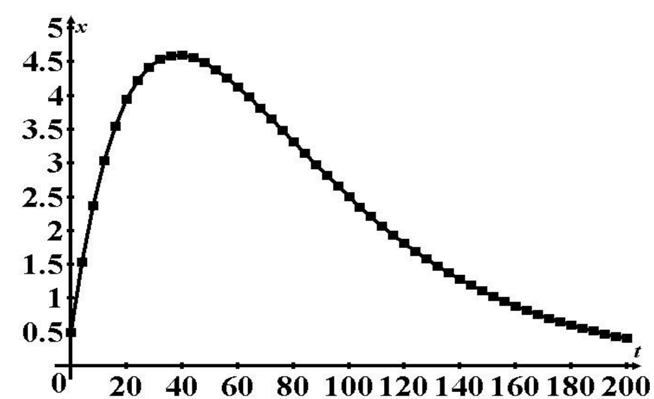
и его решения **(4)** $\lambda > b:\ x = e^{-b*t} * A * \sin(p * t + \alpha)$

$p^2 = \lambda^2 - b^2 \quad r^2 = b^2 - \lambda^2$ **(5)** $\lambda < b:\ x = C_1 * e^{-(b+r)*t} + C_2 * e^{-(b-r)*t}$

(6) $\lambda = b:\ x = e^{-b*t} * [C_1 + C_2 * t]$







КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ (продолжение)

2) ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ – это колебания, которые происходят под действием внешнего периодического воздействия.

а) Не вязкая среда Дифференциальное уравнение **(7)**

$$m*x''+k*x=H*\sin(\omega*t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x''+\lambda^2*x=G*\sin(\omega*t)$$

$$s=\lambda^2-\omega^2$$

и его решения **(8)** $$\omega\neq\lambda:\; x=A*\sin(\lambda*t+\alpha)+\frac{G}{s}*\sin(\omega*t)$$

(РЕЗОНАНС) **(9)** $$\omega=\lambda:\; x=A*\sin(\lambda*t+\alpha)+\frac{G*t}{2*\lambda}*\sin\left(\lambda*t-\frac{\pi}{2}\right)$$

б) Вязкая среда

$$C=\frac{G}{\sqrt{(s^2-4*b^2*\omega^2)}}$$

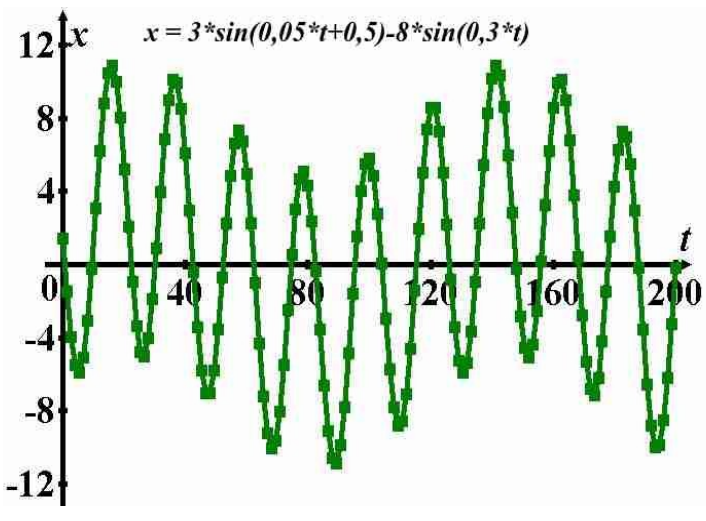
Дифференциальное уравнение **(10)**

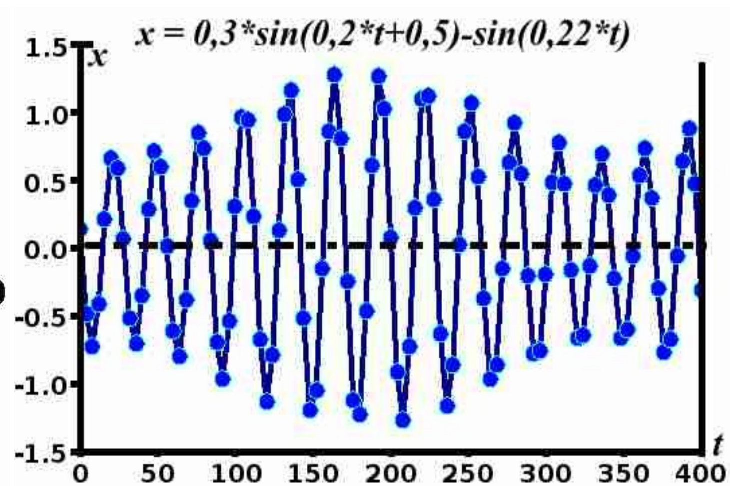
$$m*x''+\mu*x'+k*x=H*\sin(\omega*t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x''+2*b*x'+\lambda^2*x=G*\sin(\omega*t)$$

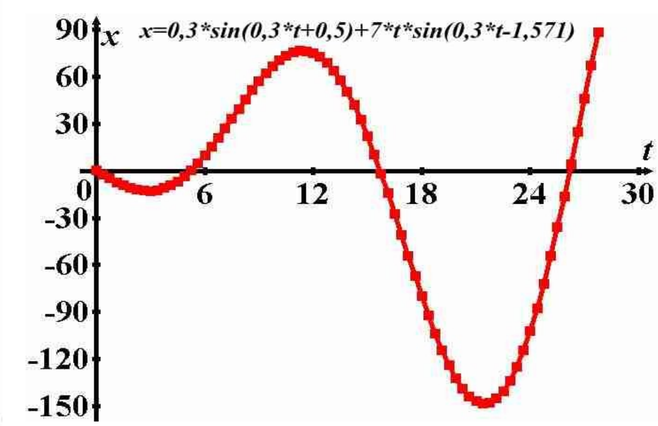
$$tg\,\beta=\frac{2*b*\omega}{s}$$

и его решение **(11)** $$x=x_1+C*\sin(\omega*t+\beta)$$

x_1 – решение соответствующего уравнения для свободных колебаний







ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Система точек – набор точек, в котором положение или движение каждой точки зависит от положения или движения остальных точек.

Внешняя сила – это сила, которая действует со стороны внешних точек на точки системы.. **Внутренняя сила** – это сила, которая действует между точками системы.

Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек системы

$$(1)\quad M=\sum_k m_k$$

Момент инерции системы точек относительно оси γ равен сумме моментов инерции точек системы относительно той же оси

$$(2)\quad I_\gamma=\sum_k m_k * r_k^2=\int_\Omega \rho * r^2\, d\omega$$

Радиус инерции системы R_γ – это расстояние от оси инерции γ до некоторой воображаемой точки, масса и момент инерции которой совпадают с массой и моментом инерции системы

$$(3)\quad I_\gamma=M*R_\gamma^2$$

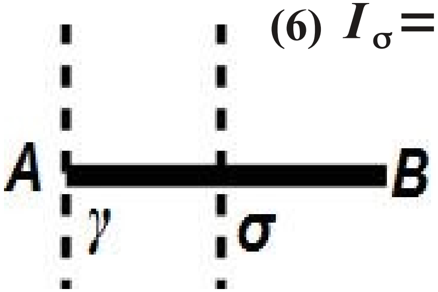
Теорема Schteiner'a. Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси γ равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси σ, которая проходит через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$(4)\quad I_\gamma=I_\sigma+m*r^2$$

1) Стержень массой M и длиной L

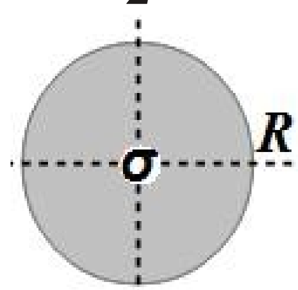
$$(5)\quad I_\gamma=\frac{M*L^2}{3}$$

$$(6)\quad I_\sigma=\frac{M*L^2}{12}$$



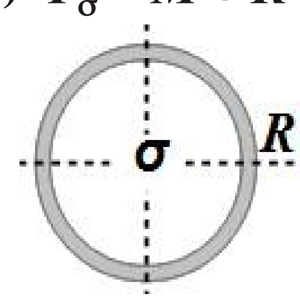
2) Однородный цилиндр массой M и радиусом R

$$(7)\quad I_\sigma=\frac{M*R^2}{2}$$



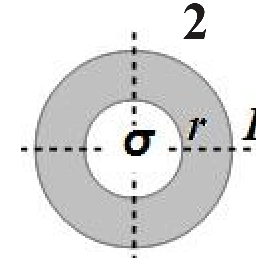
3) Тонкий однородный цилиндр или кольцо массой M и радиуса R.

$$(8)\quad I_\sigma=M*R^2$$



4) Однородное кольцо массой M и радиусами r и R.

$$(9)\quad I_\sigma=\frac{M*\left(R^2+r^2\right)}{2}$$



ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК (продолжение)

Кинетическая энергия системы точек равна сумме кинетических энергий точек

$$(10)\ E=\frac{1}{2}*\sum_k m_k*v_k^2 \qquad (11)\ E=\frac{1}{2}*\sum_k I_k^O*\omega_k^2$$

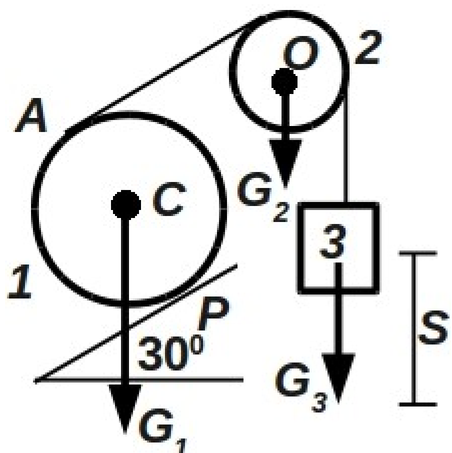
Теорема König'a. Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии центра масс при поступательном движении и кинетической энергией вращательного движения тела вокруг центра масс

$$(12)\ E=\frac{m*v_C^2}{2}+\frac{I_C*\omega^2}{2}$$

Теорема. Изменение кинетической энергии системы точек при перемещении её из одного положения в другое равно сумме работ на этом перемещении всех внутренних и внешних сил, приложенных к точкам системы

$$(13)\ E_{II}-E_I=\sum_k A_k^i+\sum_k A_k^e$$

ПРИМЕР Дано: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$ кг, $s = 2$ м. Найти скорость и ускорение тела 3 после перемещения на расстояние s.



Решение

$$E=E_1+E_2+E_3 \quad E_3=\frac{m_3*v_3^2}{2}=v_3^2 \quad E_2=\frac{I_O*\omega_2^2}{2} \quad E_1=\frac{m_1*v_C^2}{2}+\frac{I_C*\omega_1^2}{2}$$

$$I_O=\frac{m_2*R_2^2}{2}=R_2^2 \quad \omega_2=\frac{v_3}{R_2} \Rightarrow E_2=\frac{v_3^2}{2} \quad v_A=v_3 \quad v_C=\omega_1*CP=\omega_1*R_1=\frac{v_3}{2}$$

$$I_C=\frac{m_1*R_1^2}{2}=\frac{R_1^2}{2} \quad \omega_1=\frac{v_3}{2*R_1} \quad E_1=\frac{1*v_3^2}{2*4}+\frac{R_1^2*v_3^2}{2*2*4*R_1^2}=\frac{3*v_3^2}{16} \quad E=\frac{27*v_3^2}{16}=1{,}688*v_3^2$$

Предположим, что тело 1 движется вниз $\quad A_{G_3}=-G_3*S_3=-2*10*2=-40$

$$A_{G_1}=G_1*S_C*\cos\left(60^0\right)=5*S_C=\frac{5*S_3}{2}=5 \qquad A=-35 \quad E_{II}=A\Rightarrow\frac{27*v_3^2}{16}=35\Rightarrow v_3=4{,}554$$

$$A=A_{G_1}+A_{G_3}=\left(20-2{,}5\right)\cdot S_3=17{,}5*S_3 \qquad 1{,}688\cdot v_3^2=17{,}5\cdot S_3\Rightarrow 2\cdot v_3\cdot a_3=10{,}370\cdot v_3\Rightarrow a_3=5{,}185$$

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ
ПРИНЦИП D'ALEMBERT 'a (1743 г)

Сила инерции – это сила, которая определяется по следующим формулам $\vec{\Phi} = -m * \vec{a} \quad \Phi = m * a$

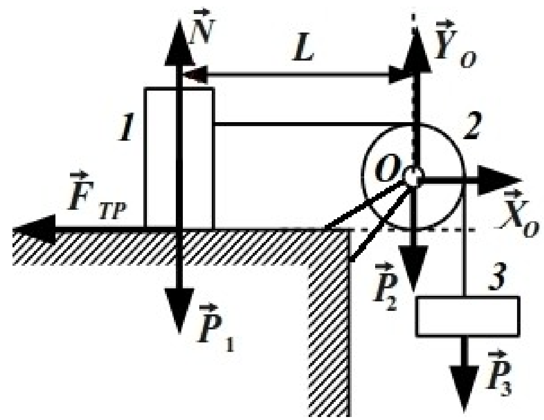
Принцип D'Alembert'a (для точки). При движении материальной точки активные силы, реакции связей и сила инерции точки образуют равновесную систему сил: $\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0$

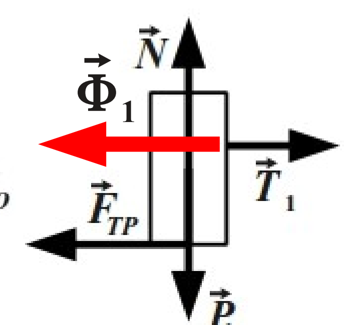
Принцип D'Alembert'a (для системы точек). При движении системы материальных точек внешние силы (активные и реакции) и сила инерции точки образуют равновесную систему сил.

$$\sum_k \vec{F}_k^e + \sum_k \vec{R}_k + \sum_k \vec{\Phi}_k = 0 \qquad \sum_k M_O(\vec{F}_k^e) + \sum_k M_O(\vec{R}_k) + \sum_k M_O(\vec{\Phi}_k) = 0$$

Момент сил инерции в случае плоского вращательного движения определяется по формуле (знак «-» указывает направление, противоположное ускорению) $\sum_k M_O(\vec{\Phi}_k) = -\varepsilon * I_O$

ПРИМЕР. Тело 1 скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести тела 3, при этом известно что $m_1 = m_3 = 3$, $m_2 = 1$ кг, $L = 1$, $r_2 = 0{,}1$м, $\mu_{ТР} = 0{,}1$. Определить реакции блока O, реакцию стола, натяжение нитей, ускорение тел.





Решение. Динамическое равновесие тела 1, тела 2, тела 3

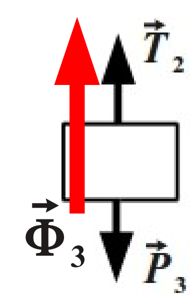
$$N - P_1 = 0\,; \; T_1 - F_{TP} - \Phi_1 = 0\,; \; T_2 - P_3 + \Phi_3 = 0\,;$$

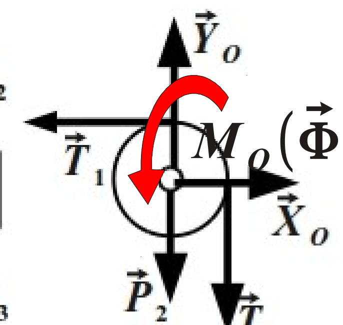
$$-T_1 + X_O = 0\,; \quad -T_2 - P_2 + Y_O = 0\,;$$

$$\sum_k M_O = r * T_1 - r * T_2 + 10 * a * I_O = 0\,; \; I_O = 0{,}5 * m_2 * r_2^2 = 0{,}005$$

$$a = 4{,}154\,; \; T_2 = 30 - 3 * a = 17{,}539\,; \; T_1 = 3 + 3 * a = 13{,}461\,;$$

$$Y_O = 10 + T_2 = 27{,}539\,; X_O = T_1 = 13{,}461$$





Проверка (теорема об изменении кинетической энергии)

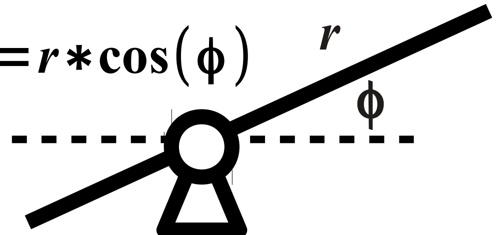
ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ LAGRANGE'a

Связь – это ограничения, которые накладываются на координаты и скорости механической системы и которые должны выполняться на любом её движении. Связь можно описать математически как равенство или неравенство, содержащее время, координаты и скорости.

Обобщенные координаты системы q_s – это независимые величины, которые однозначно определяют положение всех точек системы. Количество таких координат определяется числом степеней свободы системы.

Пример 1. Рычаг: положение определяется заданием одной величины – углом наклона ϕ; кривошипно-ползунный механизм определяется углом поворота кривошипа ϕ.

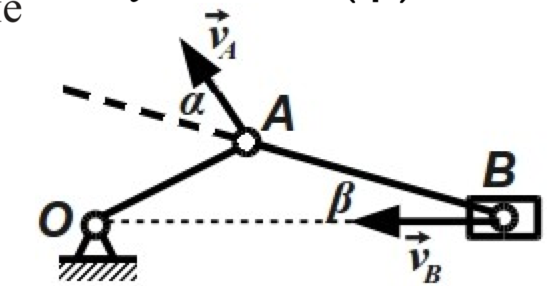
$$x=r*\cos(\phi)$$



$$y=r*\sin(\phi)$$

Возможные (виртуальные) перемещения δs несвободной механической системы – это воображаемые бесконечно малые перемещения, которые допускаются в данный момент наложенными на систему связями.

Пример 2. Определим величину δs точек *A и B* для кривошипно-ползунного механизма.



Решение. $v_A=OA*\omega_{OA}$ $v_A=\dfrac{\delta s_A}{\delta t}$ $\omega_{OA}=\dfrac{\delta\phi_{OA}}{\delta t}$ $\Rightarrow\delta s_A=OA*\delta\phi_{OA}$

$$v_B*\cos(\beta)=v_A*\cos(\alpha)\Rightarrow v_B=\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}*v_A \quad v_B=\frac{\delta s_B}{\delta t}\Rightarrow\delta s_B=\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}*\delta s_A=\frac{OA*\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}*\delta s_A$$

Возможная работа δA приложенной силы F – это элементарная работа, которую могла бы совершить сила при возможном перемещении **δs**:

$$\delta A=F*\delta s*\cos(\gamma)$$

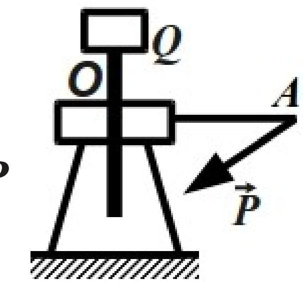
$$\delta A=M_O(\vec{F})*\delta\phi$$

Связи называются **идеальными**, если сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю

Принцип возможных перемещений Lagrange'a. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю..

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ LAGRANGE'а (продолжение)

Пример 1. Груз $\boldsymbol{Q}$ весом 10000 Н поднимается с помощью домкрата, который приводится в движение рукояткой $\boldsymbol{OA}$ **= 0,6** м. К концу рукоятки, перпендикулярно ей, приложена сила $\boldsymbol{P}$. Определить величину силы $\boldsymbol{P}$, если шаг винта домкрата $\boldsymbol{h}$ **= 0,012** м .



Решение. Пусть рычаг $\boldsymbol{OA}$ совершит бесконечно малый поворот на угол $\boldsymbol{\delta\varphi}$. Работа силы $\boldsymbol{P}$ определится по формуле $\boldsymbol{\delta A_P = M_O(P)*\delta\varphi = P*OA*\delta\varphi = 0{,}6*P*\delta\varphi}$.

Определим перемещение и работу груза $\boldsymbol{Q}$. Шаг винта – это расстояние, которое пройдёт винт за полный оборот рукоятки в $\mathbf{360^0}$, значит после поворота на угол $\boldsymbol{\delta\varphi}$ винт и груз пройдут расстояние $\boldsymbol{\delta s_Q = 0{,}012*\delta\varphi/2\pi = 0{,}0019*\delta\varphi}$, при этом работа будет равна $\boldsymbol{\delta A_Q = -Q*\delta s_Q = -10000*0{,}0019*\delta\varphi = -19*\delta\varphi}$

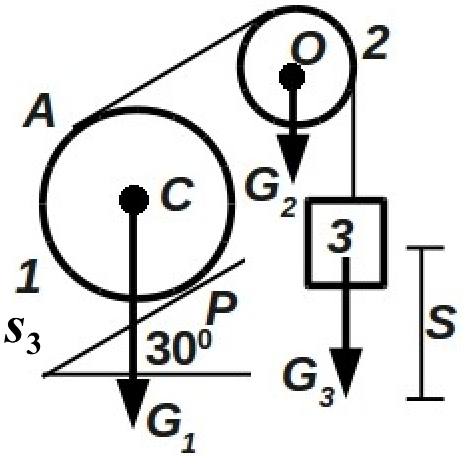
Сумма возможных работ равна нулю, поэтому $\boldsymbol{P = 19/0{,}6 = 31{,}667}$ **Н**

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ D'ALEMBERT'а – LAGRANGE'а

Принцип D'Alembert'а – Lagrange'а (для систем, которые движутся с ускорением): при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

$$\sum_k \delta A_k^a + \sum_k \delta A_k^\Phi = 0$$

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ
(продолжение)



Пример. Дано: $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$ кг. Найти a_3.

Решение. Найдём виртуальные работы активных сил: G_1, G_3.

$$\delta A_{G_3} = G_3 * \delta s_3 = 20 * \delta s_3 \quad \delta A_{G_1} = -G_1 * \delta s_C * \cos(60^0) = -5 * \delta s_C = -2{,}5 * \delta s_3$$

Найдём виртуальные работы сил инерции Φ_C, Φ_3.

$$\delta A_{\Phi_3} = -\Phi_3 * \delta s_3 = -2 * a_3 * \delta s_3 \quad \delta A_{\Phi_C} = -\Phi_C * \delta s_C = \frac{-m_1 * a_C * \delta s_3}{2} = -1 * \frac{a_3}{2} * \frac{\delta s_3}{2} = \frac{-a_3 * \delta s_3}{4}$$

Найдём виртуальные работы пар сил инерции с моментом M_2 *и* M_1

$$\delta A_{M_2} = -M_2 * \delta \phi_2$$ Найдём M_2.и $\delta\varphi_2$ $$M_2 = \varepsilon_2 * I_O = \frac{a_3}{r_2} * \frac{m_2 * r_2^2}{2} = a_3 * r_2$$

$$v_3 = r_2 * \omega_2 \Rightarrow \delta s_3 = r_2 * \delta \phi_2 \Rightarrow \delta \phi_2 = \frac{\delta s_3}{r_2} \qquad \delta A_{M_2} = -\frac{a_3 * r_2 * \delta s_3}{r_2} = -a_3 * \delta s_3$$

$$\delta A_{M_1} = -M_1 * \delta \phi_1$$ Найдём M_1.и $\delta\varphi_1$ $$M_1 = \varepsilon_1 * I_C = \frac{a_3}{2 * r_1} * \frac{m_1 * r_1^2}{2} = \frac{a_3 * r_1}{4}$$

$$v_3 = v_A = 2 * r_1 * \omega_1 \Rightarrow \delta s_3 = 2 * r_1 * \delta \phi_1 \Rightarrow \delta \phi_1 = \frac{\delta s_3}{2 * r_1} \qquad \delta A_{M_1} = -\frac{a_3 * r_1 * \delta s_3}{4 * 2 * r_1} = -\frac{a_3 * \delta s_3}{8}$$

$$20 * \delta s_3 - 2{,}5 \delta s_3 - 2 * a_3 * \delta s_3 - 0{,}25 * a_3 \delta s_3 - 1{,}125 * a_3 * \delta s_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 5{,}185$$

УРАВНЕНИЕ LAGRANGE'а II РОДА

Возможная работа δA всех сил, которые действуют на систему тел (с одной степенью свободы) может быть всегда записана в виде равенства

$$\delta A = Q \cdot \delta q \tag{1}$$

Величина Q называется **обобщённой силой**, её размерность зависит от размерности обобщённой координаты q, так что общая размерность произведения совпадает с размерностью работы. Величина обобщённой силы определяется после выражения возможной работы через возможную координату q.

Общее уравнение динамики можно переписать в форме уравнения Lagrange'а II рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q \tag{2}$$

Для того, чтобы для данной системы построить уравнения Lagrange'а II рода необходимо:

1) выбрать обобщенную координату q;

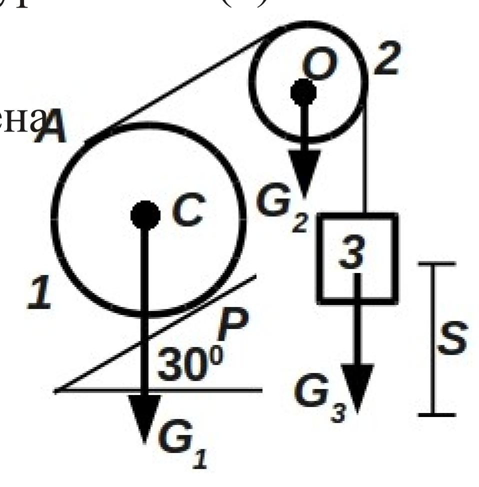
2) изобразить систему в любом положении и указать все активные силы (в том числе и силы трения);

3) вычислить обобщенную силу Q, при этом надо учесть, что приращение соответствующей обобщенной координаты должно быть положительным;

4) вычислить кинетическую энергию E при абсолютном движении и выразить эту энергию через обобщенные координаты и скорости;

5) вычислить все частные и обыкновенные производные и подставить их в уравнение (2).

ПРИМЕР Дано: $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$ кг. Найти ускорение тела 3.

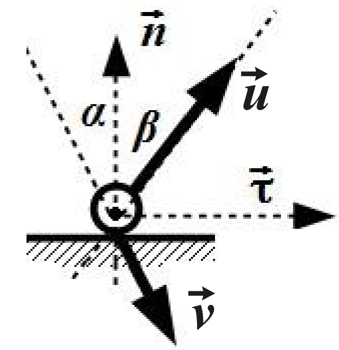


Решение: обобщённая координата $q = S_3$. Кинетическая энергия была определена ранее $E = 1{,}688 * v_3^2 = 1{,}688 * \left(S_3^{/}\right)^2$ Возможная работа была определена следующим образом: $\delta A = 17{,}5 * \delta S_3$, откуда $Q = 17{,}5$. Вычислим производные $\frac{\partial E}{\partial q^{/}} = 3{,}375\, S_3^{/}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right) = 3{,}375\, S_3^{//} = 3{,}375 \cdot a_3$ $\quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$. Тогда из (2) получим $3{,}375 \cdot a_3 = 17{,}5 \Rightarrow a_3 = 5{,}185$

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

Удар – это явление, при котором под действием определенных (ударных) сил скорости точек тела за очень малый промежуток времени τ (время удара) изменяется на конечную величину.

Удар называется **центральным**, если нормаль к поверхности в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела.



Удар называется **прямым**, если скорость центра масс в начале удара была направлена по нормали к поверхности падения. В противном случае удар называется **косым.**

Пусть *v, u* – начальная и конечная скорости при ударе, тогда

(1) $m*(\vec{u}-\vec{v})=\sum \vec{p}_k=\vec{p}_{уд}$ (2) $\vec{p}_{уд}=\int_0^\tau \vec{F}_{уд}\,d\tau=\vec{F}_{уд}^{ср}\tau$ $p_{уд}$ – ударный импульс; $F_{уд}$ – ударные силы

Теорема Кельвина. Работа ударных сил равна скалярному произведению ударного импульса на векторную полусумму начальной и конечной скорости при ударе:

(3) $A_{уд}=0{,}5\cdot\vec{p}_{уд}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

Коэффициент восстановления при ударе – это величина *k*, которая равна отношению модуля нормальной составляющей относительной скорости тела в конце удара к её величине в начале удара, где *h* – высота подъёма после удара, *H* – высота падения, α – угол падения, β – угол отражения.

(4) $k=\frac{u_n}{v_n}=\sqrt{\frac{h}{H}}=\frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ

Закон сохранения количества движения: общее количество движения до удара и после равно между собой:

(5) $m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2=m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2$

Коэффициент восстановления при ударе (6) $k=\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}$

Теорема Карно. Потеря кинетической энергии в случае мгновенного наложения связей и отсутствия ударного трения равна кинетической энергии от потерянной скорости точки:

(7) $E_I-E_{II}=\frac{1-k}{1+k}\cdot\left[\frac{m_1}{2}\cdot(v_1-u_1)^2+\frac{m_2}{2}\cdot(v_2-u_2)^2\right]$

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВОЗЛЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Равновесие системы называется **устойчивым**, если при малом отклонении системы от положения равновесия все последующие отклонения будут еще меньше.

Теорема Лагранжа – Дирихле. Если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым.

Потенциальное силовое поле – это часть пространства, на каждую точку которого действует потенциальная сила, то есть сила, работу которой на любом перемещении точки ***M*** можно определить, зная только начальное и конечное её положение по формуле (1)

(1) $A_{(M_1 M_2)} = U_2 - U_1$ где ***U*** – функция, дифференциал которой равен элементарной работе $dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Потенциальная энергия точки в положении ***M*** – это скалярная величина ***П***, равная той работе, которую произведут силы потенциального силового поля при перемещении точки из положения ***M*** в нулевое (2). Отсюда работа потенциальных сил при перемещении из одной точки в другую может быть определена по формуле (3)

(2) $\Pi_M = A_{MO} = U_O - U_M = -U_M$ **(3)** $A_{(M_1 M_2)} = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2$

Примеры: потенциальная энергия силы тяжести ***F = mg*** и силы упругости ***F = - kx***

(4) $\Pi_G = m g (h_1 - h_2)$ **(5)** $\Pi_У = 0{,}5\, k[(\Delta + x)^2 - \Delta^2]$

h_1, h_2 – начальная и конечная высота,
k – коэффициент жёсткости пружины,
Δ – длина пружины в статическом равновесии;
x – деформации пружины

Пусть на систему тел действует потенциальная сила, сила вязкого сопротивления, внешняя активная сила. Тогда уравнение Lagrange'а имеет вид (6)

(6) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q'}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_B + Q_C$

Q_B, Q_C – обобщённые внешняя сила и сила сопротивления

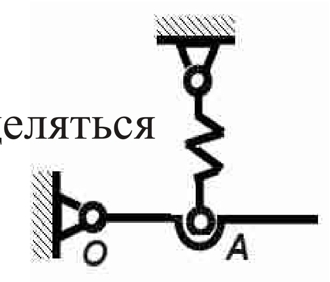
В случае малых колебаний выполняются равенства (7)

(7) $\frac{\partial E}{\partial q'} = a \cdot q'$ $\frac{\partial E}{\partial q} = 0$ $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = k \cdot q$ $Q_C = -\mu \cdot q'$

$q'' + 2 m_1 q' + m_2^2 q = f$ $2 m_1 = \mu / a$ $m_2^2 = k / a$

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВОЗЛЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ (пример решения задач)

Пример. Определить собственную частоту малых колебаний однородного жёсткого стержня длиной l, если его масса равна 3 кг, коэффициент жёсткости 400 Н/м, точка A делит стержень пополам.



Решение: Составим уравнение Lagrange'a II рода. Пусть s_A – обобщённая координата вертикальное перемещение точки A, тогда кинетическая энергия стержня будет определяться по формуле

$$E=\frac{I_O\cdot\omega_{OA}^2}{2}\text{, где } I_O=\frac{m\cdot l^2}{3};\omega_{OA}=\frac{2v_A}{l}\text{. Тогда } E=\frac{I_O\cdot\omega_{OA}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot l^2}{3}\cdot\frac{4v_A^2}{l^2}=2(s_A^{/})^2$$

Левая часть уравнения имеет вид $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial q^{/}}\right)-\dfrac{\partial E}{\partial q}=4s_A^{//}$

На систему действуют две потенциальных силы с общей энергией

$$\Pi=mgs_A+0{,}5k[(\Delta+s_A)^2-\Delta^2]=30s_A+200[(\Delta+s_A)^2-\Delta^2],\text{ откуда } \frac{\partial\Pi}{\partial s_A}=30+400\cdot(\Delta+s_A)$$

Δ – длина пружины в положении равновесия, которая определяется из равенства $\dfrac{\partial\Pi}{\partial s_A}=0$ при условии, что $s_A = 0$. Тогда $\Delta = -30/400 = -3/40$ и отсюда $\dfrac{\partial\Pi}{\partial s_A}=400s_A$

Дифференциальное уравнение малых колебаний имеет вид $4s_A^{//}+400s_A=0\Rightarrow s_A^{//}+100s_A=0$

Отсюда получаем собственную частоту колебаний $k=\sqrt{100}=10$

Ответ: k =10 1/с