Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Составители
А. С. Богатырева
М. А. Баев

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛЫ

Методические указания к индивидуальным заданиям
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано учебно-методической комиссией специальности
21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового
производства в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2021

Рецензенты:

Сирота Д. Ю., доцент кафедры теоретической и геотехнической механики

Хямяляйнен В. А., председатель учебно-методической комиссией специальности 21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового производства

Богатырева Альбина Сергеевна
Баев Михаил Алексеевич
Свободные колебания под действием восстанавливающей силы : методические указания к индивидуальным заданиям по дисциплине «**Теоретическая механика**» для обучающихся технических специальностей и направлений / сост. А. С. Богатырева, М. А. Баев ; Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева. – Кемерово, 2021. – Текст : электронный.

В предлагаемых указаниях представлены теоретические положения раздела «Динамика точки» курса «Теоретической механики», задания для самостоятельной работы студентов, пример выполнения и оформления этих заданий.

Назначение издания – помощь обучающимся в получении знаний по дисциплине «Теоретическая механика», организация и контроль самостоятельной работ.

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях приведены основные положения раздела теоретической механики «Дифференциальные уравнения движения материальной точки». Рассмотрены примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом разделения переменных.

Для выполнения индивидуальных задании необходимо знать основные законы динамики, уметь составлять дифференциальные уравнения движения материальной точки и поступательного движения твердого тела, представлять механический смысл начальных условий, уметь вычислять простейшие интегралы и определять постоянные интегрирования.

В целом, умение составлять и решать дифференциальные уравнения движения открывает широкие возможности для моделирования физических процессов. С целью привития студенту элементов навыков математического моделирования ниже приведены индивидуальные задания.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Решение основных задач динамики точки поступательного движения твердого тела сводится к решению дифференциальных уравнений движения, которые являются проекциями основного уравнения динамики $m\bar{a} = \bar{F}$ на оси координат. В случае свободной материальной точки дифференциальные уравнения движения в проекции на оси декартовой системы координат запишутся в виде

$$m\ddot{x} = X; \quad m\ddot{y} = Y; \quad m\ddot{z} = Z. \tag{1}$$

В проекциях на оси естественной системы координат в виде

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau; \quad m\frac{1}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = F_n; \quad O = F_в, \tag{2}$$

где m – масса точки (тела); x, y – декартовые координаты; S – дуговая координата; X, Y – проекции равнодействующей сил на декартовые оси координат; $F_\tau, F_n, F_в$ – проекции равнодействующей сил на оси естественной системы координат.

Ограничиваясь в дальнейшем только координатным способом задания движения точки, общее решение (общий интеграл) системы дифференциальных уравнений (1) можно записать в виде

$$x = x(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$
$$y = y(t, C_1, C_2, ..., C_6); \quad (3)$$
$$z = z(t, C_1, C_2, ..., C_6).$$

Постоянные интегрирования $C_1, C_2, ..., C_6$ определяются из начальных условий: при $t = t_0 = 0$:

$$x = x_0, \ \dot{x} = \dot{x}_0;$$
$$y = y_0, \ \dot{y} = \dot{y}_0; \quad (4)$$
$$z = z_0, \ \dot{z} = \dot{z}_0,$$

где x_0, y_0, z_0 – начальные координаты; $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ – проекции начальной скорости на оси координат.

В случае независимости движения точки вдоль каждой из осей координат общее уравнение (3) запишется в виде

$$x = x(t, C_1, C_2); \quad y = y(t, C_3, C_4); \quad z = z(t, C_5, C_6). \quad (5)$$

Ограничиваясь рассмотрением случая движения точки в одной плоскости, из (5) и (4) получим следующую систему четырех алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования

$$x_0 = x(t_0, C_1, C_2); \quad \dot{x}_0 = x(t_0, C_1, C_2);$$
$$y_0 = y(t_0, C_3, C_4); \quad \dot{y}_0 = y(t_0, C_3, C_4). \quad (6)$$

Система уравнений (6) получена путем подстановки начальных условий (4) в выражения для координат x, y (5) и их производных $\dot{x}, \dot{y}$.

В случае одномерного движения уравнения (5) будут представлены только одним уравнением (например, первым) и уравнения (6) запишутся в виде

$$x_0 = x(t_0, C_1, C_2), \quad \dot{x}_0 = x(t_0, C_1, C_2).$$

Основной метод интегрирования дифференциальных уравнений – это метод разделения переменных. Суть данного приема заключается в том, что нужно понизить порядок дифференциальных уравнений (1). Число переменных в уравнении должно быть равно двум. Дальше преобразуем уравнение таким образом, чтобы левая и правая части уравнения содержали выражения, зависящие только от одной переменной и их производной по этой переменной. В результате первого интегрирования получают проекции скоростей точки на оси координат в виде функций времени или координат, то есть, как говорят в механике, – первые интегралы или проекции скорости точки на оси координат. Затем проекции скоростей представляют в виде производных по времени, то есть записывают в виде дифференциальных уравнений первого порядка. Вновь разделяют переменные и интегрируют. Получают координаты точки в виде функций времени, то есть, как говорят в механике, – вторые интегралы или уравнения движения точки.

2. Задание
Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы

Найти уравнение движения груза A массой m кг, отнеся его движение к оси Ox (рис. 1. Схемы (0–9)). Определить также амплитуду, круговую частоту и период колебаний груза A, если: C_1, C_2, C_3 – коэффициенты жесткости пружин; α – угол наклона плоскости к горизонту; λ_0 – начальная деформация пружин из положения статического равновесия; V_{0x} – проекция начальной скорости груза A на ось Ox. Весом пружин и трением груза A о плоскость пренебречь. Необходимые данные для решения приведены в таблице.

Прочерки в столбцах таблицы означают, что соответствующие пружины отсутствуют и их на схемах не нужно изображать.

Указания к решению

В задачах необходимо составить дифференциальное уравнение движения груза A в проекции на ось Ox. За начало координат выбираем положение статического равновесия груза A, где сила упругости пружины уравновешивается силой растягивающей пружину.

В тех случаях, где имеются две пружины, их следует заменить одной эквивалентной пружиной, определив ее коэффициент жесткости C.

1. В случае последовательного соединения пружин (рис. 1 *а*) коэффициент жесткости C равен

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

2. В случае параллельного соединения (рис. 2 *б*, *с*) жесткость эквивалентной пружины равна $C = C_1 + C_2$.

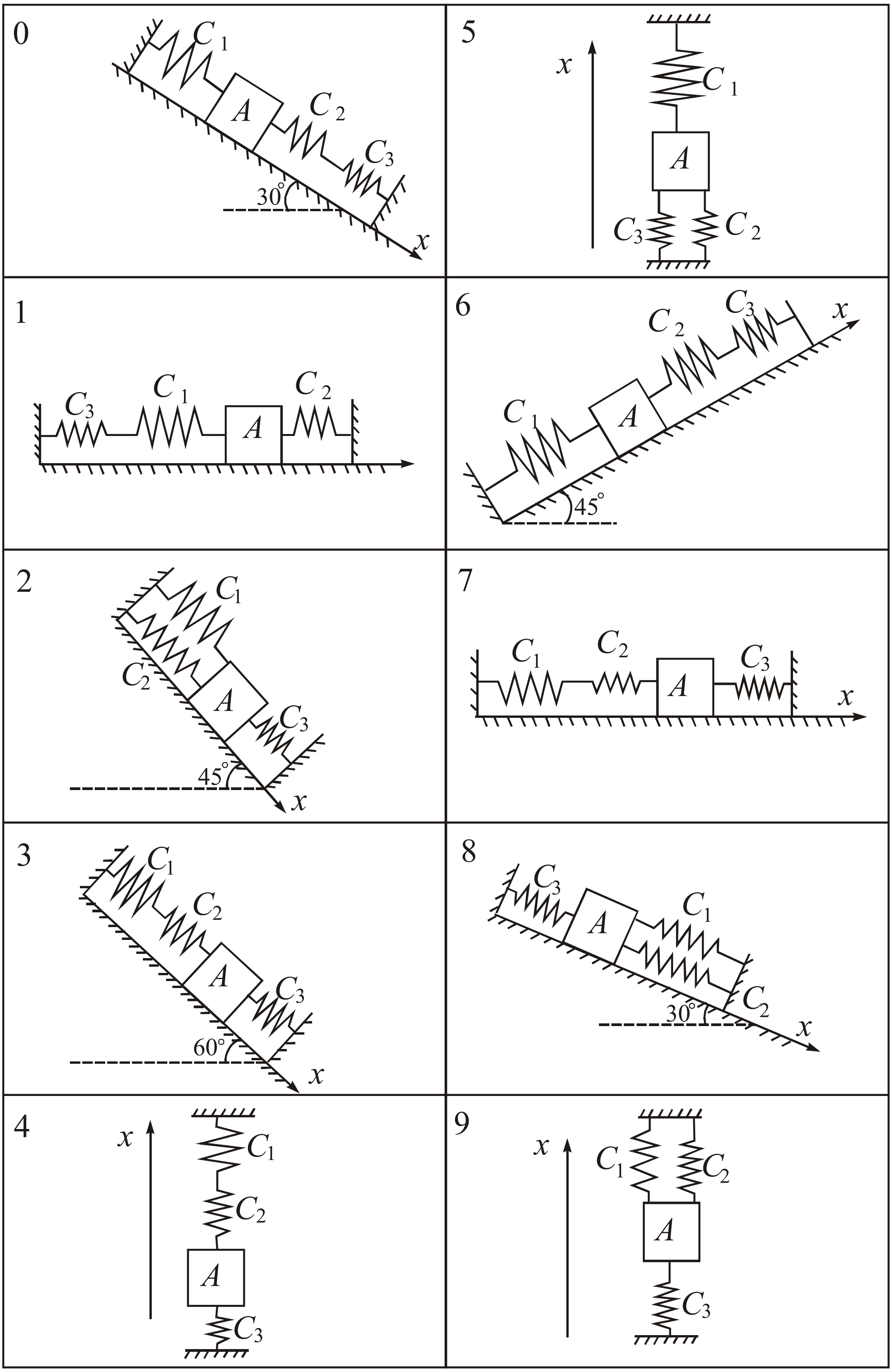
0
C_1
A
C_2
C_3
30°
x
5
x
C_1
A
C_3
C_2
1
C_3
C_1
A
C_2
6
C_3
x
C_2
C_1
A
45°
2
C_1
C_2
A
C_3
45°
x
7
C_1
C_2
A
C_3
x
3
C_1
C_2
A
C_3
60°
x
8
C_3
A
C_1
C_2
30°
x
4
x
C_1
C_2
A
C_3
9
x
C_1
C_2
A
C_3

Рис. 1

№ варианта	№ схемы	m, кг	C_1 Н/м	C_2 Н/м	C_3 Н/м	Дополнительное условие	λ_0, см	V_{Ox}, м/с
1	0	8	3	4	–	–	5	0,5
2	0	2	6	–	5	–	4	0,4
3	1	4	5	4	–	–	2	0,1
4	1	10	–	5	6	–	6	0,3
5	1	12	2	–	4	–	3	0,2
6	2	6	4	–	2	–	5	0,1
7	2	3	–	4	9	–	2	0,5
8	2	4	4	7	–	–	4	0,4
9	3	6	2	8	–	–	5	0,2
10	3	2	2	–	4	–	6	0,2
11	3	8	3	–	4	–	5	0,5
12	4	2	10	15	–	Ось x направить вниз	4	0,4
13	4	4	5	–	4		2	0,1
14	5	10	6	5	–	Ось x направить вниз	6	0,3
15	5	5	2	–	6		3	0,2
16	7	6	4	5	–	–	5	0,1
17	7	3	7	–	8	–	2	0,5
18	7	4	4	7	6	–	4	0,4
19	8	6	2	8	–	–	8	0,2
20	8	8	2	–	4	–	4	0,2
21	8	2	7	3	4	–	5	0,5
22	9	4	–	10	5	Ось x направить вниз	4	0,4
23	9	7	5	–	7		2	0,1
24	9	8	6	5	3		6	0,3
25	0	6	2	6	3	–	3	0,2

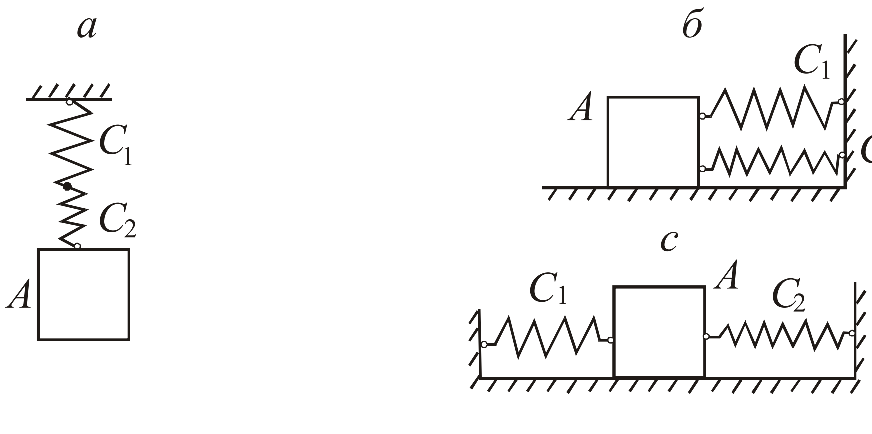

Рис. 2

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

3.1. Первый вариант решения задачи

Груз A массой m = 1 кг, расположенный на наклонной плоскости α = 60°, смещен относительно положения статического равновесия на λ_0 = 0 и ему сообщается начальная скорость V_0 = 5 м/с. После этого груз A под действием упругой силы пружин $\vec{F}_{упр}$ начинает совершать колебательные движения. Пружины, жесткость которых C_1 = 1 Н/см и C_2 = 3 Н/см, соединены последовательно. Определить амплитуду, круговую частоту, период колебаний и уравнение движения груза A (рис. 3).

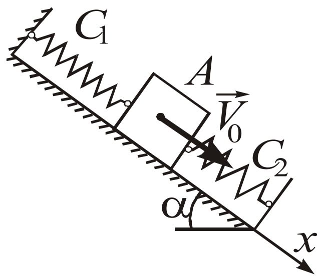

Рис. 3

Дано: m = 1 кг; C_1 = 1 Н/см; C_3 = 3 Н/см; λ_0 = 0; V_0 = 5 м/с.

Определить: A, k, T, $x = x(t)$.

Решение. 1. Тело A движется поступательно, заменяем его материальной точкой M.

2. На точку M действуют силы тяжести $\vec{P}$, реакция гладкой поверхности $\vec{N}$ и сила упругости эквивалентной пружины $\vec{F}_{упр}$.

3. Начало координат выберем в положении статического равновесия, где сила упругости $\vec{F}_{упр}$ уравновешивается растягивающей пружину силой $P_x = P\sin\alpha$.

4. Заменим две пружины одной с эквивалентной жесткостью C_C . Поскольку соединение пружин параллельное, то жесткость эквивалентной пружины равна

$$C_C = C_1 + C_2 = 4 \text{ Н/см} = 400 \text{ Н/м}.$$

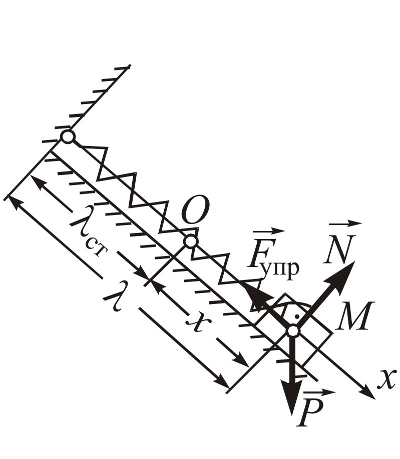

Рис. 4

5. Сила упругости $F_{упр}$ всегда направлена к положению статического равновесия (рис. 4), а ее величина равна

$$F_{упр} = C_C\lambda = C_C(\lambda_{ст} + x),$$

где $\lambda_{ст}$ – статическое удлинение эквивалентной пружины; x – координата точки M.

6. Составим дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на ось x:

$$mx\ddot{} = \sum F_{kx},\ m\ddot{x} = P\sin\alpha - F_x = P\sin\alpha - C_c\lambda_{ст} - C_c x. \qquad (1)$$

В положении статического равновесия

$$F_{упр} = C_C\lambda_{ст} = P\sin\alpha.$$

Уравнение равновесия будет иметь вид

$$0 = P\sin\alpha - C_c\lambda_{ст}.$$

С учетом этого результата уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} + C_c x = 0 \text{ или } \ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{C_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{400}{1}} = 20\ \text{с}^{-1}$ – круговая частота колебаний.

Если начало координат выбрано в положении статического равновесия, то дифференциальное уравнение свободных колебаний всегда будет иметь вид уравнения (2).

7. Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1\sin kt + C_2\cos kt \qquad (3)$$

В уравнении (3) C_1, C_2 – это не жесткость пружин, а постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий, т. к. во всех учебниках жесткость пружин и постоянные интегрирования обозначаются буквой С.

8. В условии задачи сказано, что $\lambda_0 = 0$ это начальное смещение тала относительно положения статического равновесия и ему сообщена начальная скорость $V_0 = 5$ м/с. Поэтому начальные условия следует записать так:

при $t = 0$

$x_0 = \lambda_0 = 0;$

$\dot{x}_0 = V_0 = 5\ \text{м/с}.$

9. Определим постоянные интегрирования C_1, C_2. В уравнение (3) подставляем значение времени $t = 0$, 0 $x_0 = 0$

$$x_0 = C_1\sin 0 + C_2\cos 0,\ C_2 = 0.$$

Уравнение (3) продифференцируем по времени, получим выражение скорости тела

$$\dot{x} = C_1 k\ \cos kt - C_2 k\sin kt. \qquad (3)$$

В уравнение (3) подставим начальное значение времени $t = 0$, начальную скорость $\dot{x}_0 = 5$ м/с, $C_2 = 0$, $k = 20\text{с}^{-1}$, находим $C_1 = 0{,}25$.

10. Уравнение движения груза $x = 0{,}25\sin 20t$, амплитуда $A = 0{,}25$ см, $k = 20\ \text{с}^{-1}$, период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 0{,}314$ с.

3.2.Второй вариант решения задачи

Решение дифференциального уравнения (1) можно записать в другом виде:

$$x = A\sin(kt + \varphi),$$

где A, φ – постоянные интегрирования, соответственно амплитуда и фаза колебаний. Для определения A, φ возьмем производную от x по времени t и подставим начальные условия (при $t = 0$ $x_0 = \lambda_0 = 0$; $\dot{x}_0 = V_{0x} = 5$ м/с):

$$\dot{x} = V_x = Ak\cos(kt + \varphi);$$

$$x_0 = \lambda_0 = 0 = A\sin\varphi; \qquad \dot{x}_0 = V_{0x} = Ak\cos\varphi.$$

Решая два последних уравнения, получим

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_{0x}^2}{k^2}} = 0{,}25 \text{ м}; \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_0 k}{V_{0x}^2} = 0.$$

Уравнение движения груза будет иметь вид

$$x = 0{,}25\sin 20t \text{ м}.$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 0{,}314$ с.

При обоих способах решения задачи результаты совпадают.

4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и запишите основной закон динамики.
2. В чем заключается первая задача динамики?
3. В чем заключается вторая задача динамики?
4. Какие колебания материальной точки называются свободными?
5. Запишите выражение восстанавливающей силы, поясните параметры.
6. Какое положение груза при колебании является статическим?
7. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний

8. Запишите общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний.

9. Сформулируйте начальные условия для определения постоянных интегрирования.

10. Как рассчитать частоту и период свободных колебаний?

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Титульный лист

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛЫ

Индивидуальное задание по дисциплине
«Теоретическая механика» по разделу «Динамика точки»

Вариант № 0000

Выполнил студент гр. ____
ФИО

Проверил доц.
ФИО

Кемерово 2021

Задание. Груз A массой m = 1 кг, расположенный на наклонной плоскости α = 60°, смещен относительно положения статического равновесия на λ_0 = 0 и ему сообщается начальная скорость V_0 = 5 м/с. После этого груз A под действием упругой силы пружин $\vec{F}_{упр}$ начинает совершать колебательные движения. Пружины, жесткость которых C_1 = 1 Н/см и C_2 = 3 Н/см, соединены последовательно. Определить амплитуду, круговую частоту, период колебаний и уравнение движения груза A (рис. 3).

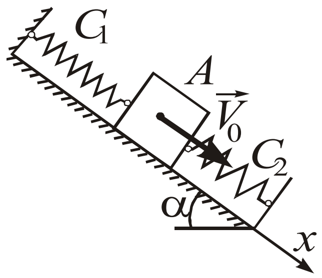

Рис. 3

Дано: m = 1 кг; C_1 = 1 Н/см; C_3 = 3 Н/см; λ_0 = 0; V_0 = 5 м/с.

Определить: A, k, T, $x = x(t)$.

Решение. 1. Тело A движется поступательно, заменяем его материальной точкой M.

2. На точку M действуют силы тяжести $\vec{P}$, реакция гладкой поверхности $\vec{N}$ и сила упругости эквивалентной пружины $\vec{F}_{упр}$.

3. Начало координат выберем в положении статического равновесия, где сила упругости $\vec{F}_{упр}$ уравновешивается растягивающей пружину силой $P_x = P\sin\alpha$.

4. Заменим две пружины одной эквивалентной, жесткость которой при параллельном соединении пружин равна:

$$C_C = C_1 + C_2 = 4 \text{ Н/см} = 400 \text{ Н/м}.$$

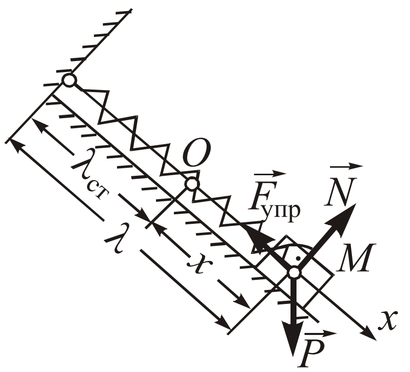

Рис. 4

5. Сила упругости $F_{упр}$ всегда направлена к положению статического равновесия (рис. 4), а ее величина равна

$$F_{упр} = C_C\lambda = C_C(\lambda_{ст} + x),$$

где $\lambda_{ст}$ – статическое удлинение эквивалентной пружины;
x – координата точки M.

6. Составим дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{x} = P\sin\alpha - F_x = P\sin\alpha - C_c\lambda_{\text{ст}} - C_c x. \qquad (1)$$

В положении статического равновесия

$$F_{\text{упр}} = C_C\lambda_{\text{ст}} = P\sin\alpha$$

Уравнение равновесия будет иметь вид

$$0 = P\sin\alpha - C_c\lambda_{\text{ст}}.$$

С учетом этого результата уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} + C_c x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{C_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{400}{1}} = 20\ \text{с}^{-1}$ – круговая частота колебаний.

7. Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \qquad (3)$$

8. В условии задачи сказано, что $\lambda_0 = 0$ это начальное смещение тала относительно положения статического равновесия и ему сообщена начальная скорость $V_0 = 5$ м/с. Поэтому начальные условия следует записать так:

при $t = 0$ $x_0 = \lambda_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0 = 5$ м/с.

9. Определим постоянные интегрирования C_1, C_2. В уравнение (3) подставляем значение времени $t = 0$, 0 $x_0 = 0$

$$x_0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0, \ C_2 = 0.$$

Уравнение (3) продифференцируем по времени, получим выражение скорости тела:

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt \qquad (3)$$

В уравнение (3) подставим начальное значение времени $t = 0$, начальную скорость $\dot{x}_0 = 5$ м/с, $C_2 = 0$, $k = 20\text{с}^{-1}$, находим $C_1 = 0{,}25$.

10. Уравнение движения груза $x = 0{,}25 \sin 20t$, амплитуда $A = 0{,}25$ см, $k = 20\text{с}^{-1}$, период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 0{,}314$ с.

Второй способ решения задачи

Решение дифференциального уравнения (1) можно записать в другом виде:

$$x = A\sin(kt + \varphi),$$

где A, φ – постоянные интегрирования, соответственно амплитуда и фаза колебаний. Для определения A, φ возьмем производную от x по времени t и подставим начальные условия (при $t = 0$ $x_0 = \lambda_0 = 0$; $\dot{x}_0 = V_{0x}$ = 5 м/с):

$$\dot{x} = V_x = Ak\cos(kt + \varphi);$$

$$x_0 = \lambda_0 = 0 = A\sin\varphi; \qquad \dot{x}_0 = V_{0x} = Ak\cos\varphi.$$

Решая два последних уравнения, получим:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_{0x}^2}{k^2}} = 0{,}25 \text{ м}; \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_0 k}{V_{0x}^2} = 0.$$

Уравнение движения груза будет иметь вид

$$x = 0{,}25\sin 20t \text{ м}.$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k} = 0{,}314$ с.

Список рекомендуемой литературы

1. Хямяляйнен, В. А. Теоретическая механика : учебное пособие для студентов технических вузов и колледжей / В. А. Хямяляйнен ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет им. Т. Ф. Горбачева. – 3-е изд. – Кемерово : КузГТУ, 2020. – 227 с. – URL: http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=91800&type=utchposob:common. – Текст : непосредственный + электронный.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2: Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 640 с. – ISBN 978-5-8114-1021-7. – URL: https://e.lanbook.com/book/168475 (дата обращения: 06.06.2021). – Текст : электронный.