

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
им. Т. Ф. Горбачёва»

В.Н. Ермак

# Теория механизмов и машин (краткий курс)

Учебное пособие

Кемерово 2011

УДК 621.01  
ББК 34.41

Р е ц е н з е н т ы :

*Кафедра прикладной механики Кемеровского государственного сельскохозяйственного института (зав. кафедрой – доктор технических наук, профессор В. И. Полтавцев)*

*Доктор технических наук, профессор Кемеровского технологического института пищевой промышленности В. С. Хорунжин*

Ермак, В. Н. Теория механизмов и машин (краткий курс) : учеб. пособие / В. Н. Ермак ; КузГТУ. – Кемерово, 2011. – 164 с.  
ISBN 978-5-89070-801-4

Изложены методы анализа и синтеза основных видов механизмов – кулачковых, зубчатых, рычажных. Отдельный раздел посвящён проблеме избыточных связей. Приведены результаты собственных исследований автора по выявлению и устранению избыточных связей в многоконтурных механизмах. Предназначено для бакалавров технологических и эксплуатационных направлений подготовки.  
Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

ISBN 978-5-89070-801-4

УДК 621.01  
ББК 34.41  
© Ермак В. Н., 2011  
© ФГБОУ ВПО «Кузбасский  
государственный  
технический университет  
им. Т. Ф. Горбачёва», 2011



## Предисловие

Предыдущее издание (Ермак В. Н. Лекции по теории механизмов и машин : учеб. пособие / Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1999. – 218 с.) было рассчитано на 51 час лекций. Настоящее издание рассчитано на 34 часа. Необходимость в нём диктует в основном преобладание направлений подготовки бакалавров, которым читается курс в таком объёме.

Из предыдущего издания исключён материал по автоматам непрерывного и дискретного действия. Сохранившиеся разделы сокращены и переработаны.

Как и в предыдущем издании, теория рассматривается по видам механизмов: кулачковые, зубчатые, рычажные. Новое заключается в том, что раздел «Структура механизмов» состоит из двух отдельных частей. В первой части, излагаемой перед рычажными механизмами, выводятся структурные формулы и рассматривается их применение к обнаружению и устранению избыточных связей в механизмах всех видов. Группы Ассура, исторически возникшие из потребностей кинематического анализа, рассматриваются «по месту потребления» – в кинематике рычажных механизмов.

Учебное пособие написано в соответствии с образовательными стандартами технологических и эксплуатационных направлений подготовки бакалавров.

Пособие не только не исключает, но и предполагает использование другой учебной литературы, она указана в конце книги.

## Введение

Теория механизмов и машин (ТММ) – это наука о методах анализа и синтеза механизмов и машин. Анализ предполагает изучение свойств существующего объекта, синтез заключается в проектировании объекта по заданным свойствам. Таким образом, анализ и синтез – это две взаимно обратные задачи. В ТММ эти задачи решаются на уровне схем – структурных, кинематических, динамических.

Схема отражает наиболее важные, принципиальные свойства машины. Ошибки в схеме имеют трудноустраняемые или непоправимые последствия, вот почему знание теории механизмов и машин важно для специалиста любого инженерно-технического направления.

Как и всякая наука, теория механизмов и машин возникла не сразу. Отдельные задачи этой теории были решены ещё в XVII веке. Теория механизмов появилась сначала как учебная дисциплина. О необходимости её преподавания впервые заговорил основатель начертательной геометрии Гаспар Монж. Он же был и первым преподавателем теории механизмов, отдельные элементы этой теории он излагал в курсе своей начертательной геометрии.

В 1808 г. в Париже был издан «Курс построения машин», написанный по программе Гаспара Монжа другими авторами. Этот курс можно считать первым учебником по теории механизмов и машин, а также некоторым другим дисциплинам машиноведения.

Говорят, что во всякой теории ровно столько науки, сколько в ней математики. Возможно поэтому датой рождения теории механизмов как науки считается 1853 г., когда была опубликована работа русского математика и механика П. Л. Чебышева по математическим методам приближённого синтеза механизмов.

Интересующиеся богатой историей теории механизмов и машин могут обратиться к многочисленным книгам А. Н. Боголюбова, например, к «Истории механики машин» [6]. Увлекательным чтением о Гаспаре Монже и других деятелях, причастных к созданию науки о машинах и механизмах, будет книга В. П. Демьянова «Геометрия и марсельеза» [7]. Не менее увлекательна книга «Рыцарь точного знания» того же автора о П. Л. Чебышеве [8].

## Основные понятия ТММ

*Машина* – это устройство, которое посредством механических движений преобразует энергию, материалы и информацию. Соответственно различают: а) энергетические, б) технологические и транспортные, в) информационные машины. Последние, как правило, являются электронными и в ТММ не рассматриваются.

*Механизм* – это преобразователь движения одних твёрдых тел в требуемые движения других. Слово «твёрдых» следует понимать как противопоставление «жидким» и «газообразным» телам, на которые физика делит все тела в природе. В зависимости от задачи твёрдые тела могут считаться как абсолютно твёрдыми, так и деформируемыми.

Обычно механизм видится как некая шарнирная цепь, отсюда составные части механизма на его кинематической или иной схеме называются *звеньями*. Неподвижное звено механизма называется *стойкой*. Звено, которому сообщается движение, называется *входным*. Звено, с которого снимается требуемое от механизма движение, называется *выходным*.

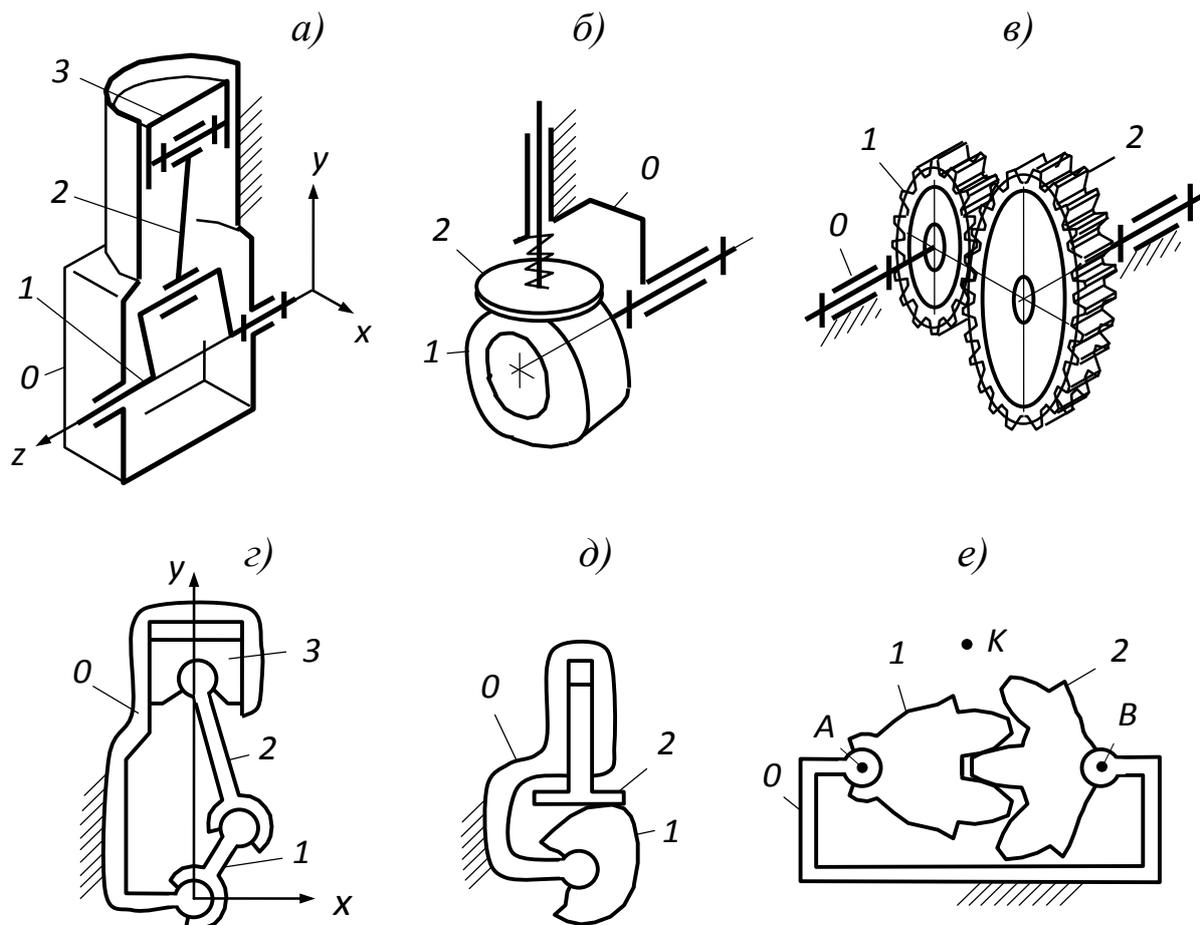
Различают плоские и пространственные механизмы. Механизм называется *плоским*, если все его звенья движутся параллельно одной и той же плоскости. В противном случае механизм называется *пространственным*.

Плоские механизмы могут изучаться как по трёхмерной, так и по двумерной модели. *Трёхмерная модель* – это сам механизм с любыми упрощениями, не затрагивающими количества измерений. *Двумерная модель* – это проекция механизма на плоскость, параллельно которой движутся звенья механизма. Двумерная модель плоского механизма является плоской буквально. Её можно считать состоящей из плоских фигур, расположенных на одной плоскости. Ниже на рисунке представлены распространённые плоские механизмы – *а, б, в* и их двумерные модели – *г, д, е*.

В силу своей простоты двумерная модель используется как первая ступень анализа и синтеза механизмов. Двумерные модели

могут быть построены и для некоторых пространственных механизмов. Однако они сложны в изображении и возможны лишь в простейших случаях.

Подвижное соединение, состоящее из двух, непосредственно соприкасающихся звеньев, называется *кинематической парой*. Например, механизм, изображённый на виде *a* содержит четыре кинематические пары. Их образуют звенья:  $0, 1$ ;  $1, 2$ ;  $2, 3$ ;  $3, 0$ . Механизмы *б* и *в* имеют по три пары:  $0, 1$ ;  $1, 2$ ;  $2, 0$ .



По характеру контакта звеньев кинематические пары делятся на низшие и высшие. Деление производится по трёхмерной модели. Класс, присвоенный при этом, сохраняется и при переходе к двумерной модели.

Пара считается *низшей*, если её звенья касаются друг друга по одной или нескольким поверхностям. Таковы все пары рычажного механизма (вид *a*). Попутно заметим, что необходимым признаком рычажного механизма является наличие в нём только низших пар.

Если касание звеньев происходит по линиям или точкам (не по поверхностям) и пара не может быть преобразована в кинематически эквивалентную низшую, то она называется *высшей*.

Подвижное соединение более чем двух звеньев называется *кинематической цепью*. Цепь, каждое звено которой образует с соседними звеньями не более двух пар, называется *простой*. Все механизмы, приведённые на обсуждаемом рисунке, состоят из простых цепей.

### Некоторые обозначения

При рассмотрении теории приходится анализировать движение не только реальных, но и воображаемых точек механизма. Предположим, что какое-то место на схеме или в стороне от схемы обозначено буквой  $K$  (см. вид  $e$ ). Тогда  $K_0$  – это точка  $K$  звена  $0$ ,  $K_1$  – точка  $K$  звена  $1$ , и т. д. – сколько звеньев, столько точек  $K$  может быть в механизме.

Точки  $K_0, K_1, K_2$  можно представлять себе как следы от прокола сразу всех воображаемых материальных плоскостей, каждая из которых связана с каким-то одним звеном механизма. Точки  $K_1, K_2$ , совпадающие в момент простановки, разбегаются по своим траекториям, как только механизм будет приведён в движение. В частности, точка  $K_1$  опишет окружность радиуса  $AK$ , точка  $K_2$  – окружность радиуса  $BK$ .

Движение звеньев, рассматриваемое относительно стойки, принимается в ТММ за *абсолютное*. Если о движении говорится без уточнения, относительно чего, то подразумевается движение относительно стойки. При указании абсолютных и относительных скоростей применяются следующие обозначения:

$v_{K_2}$  – абсолютная скорость точки  $K_2$ ;

$v_{K_2 1}$  – скорость точки  $K_2$  относительно звена 1;

$\omega_2$  – абсолютная угловая скорость звена 2;

$\omega_{2 1}$  – угловая скорость звена 2 относительно звена 1.

Аналогично обозначаются линейные и угловые ускорения.

# 1 Кулачковые механизмы

Схемы кулачковых механизмов, которые будут рассмотрены в данном разделе, изображены на рис. 1.1.

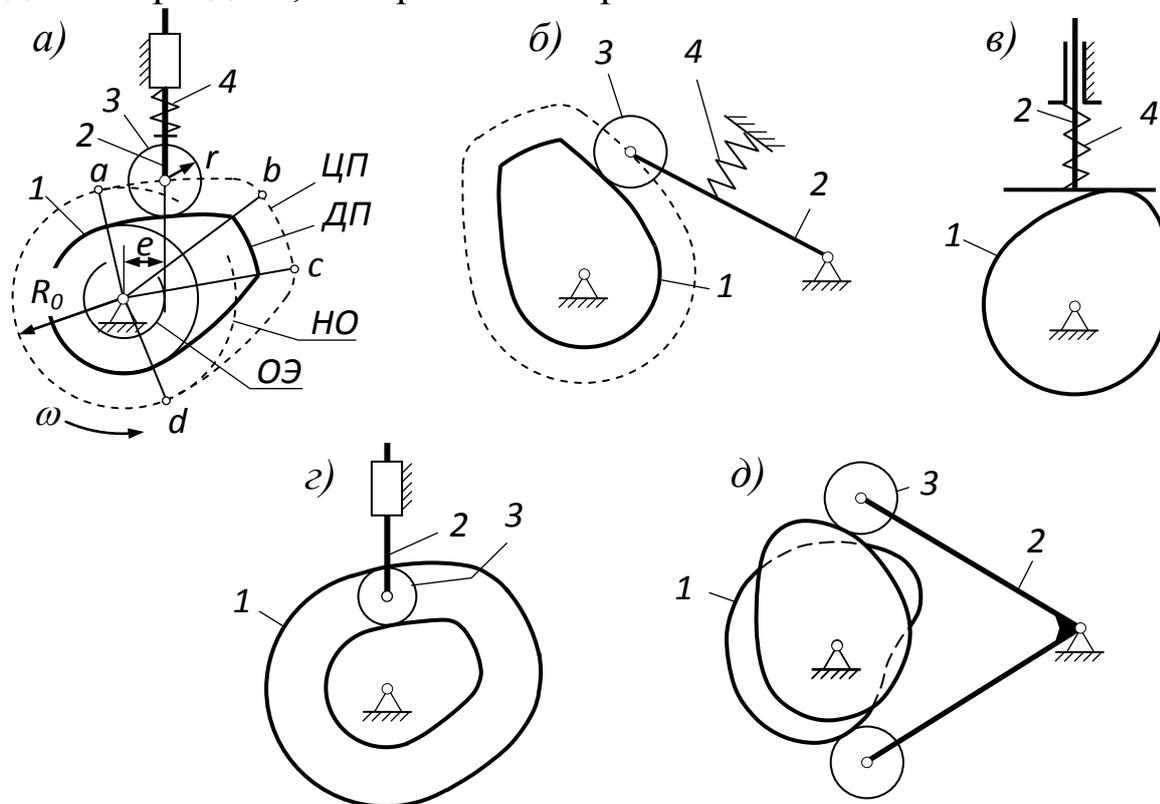


Рис. 1.1

Это плоские механизмы. На всех схемах звенья имеют следующие наименования: 1 – кулачок; 2 – толкатель; 3 – ролик. Пружина 4 звеном не считается, она рассматривается как элемент, обеспечивающий так называемое *силовое замыкание* пары кулачок – толкатель. Чем больше скорость вращения кулачка, тем сильнее должна быть пружина и тем выше дополнительная нагрузка на все кинематические пары. Чтобы избавиться от пружины, применяют схемы с *геометрическим замыканием*. Примеры таких схем приведены на рис. 1.1, г, д.

На виде г ролик входит в паз, выполненный на торце кулачка. На виде д кулачок *двухдисковый*, профили дисков разные и расположены в разных плоскостях. Представленные схемы отличаются только типом толкателя. В схеме а толкатель *стержневой*, в схеме б – *коромысловый*, в схеме в – *тарельчатый*. Коромысловый толкатель называют коротко коромыслом. Хотя коромысловый толка-

тель тоже стержневой, путаницы не возникает, т. к. у него есть собственное название.

Смещение  $e$  толкателя в схеме  $a$  называется *эксцентриситетом*. При вращении кулачка ось толкателя постоянно касается окружности радиуса  $e$ , называемой окружностью эксцентриситета ( $OЭ$ ). Эксцентриситет может быть равен нулю, и тогда механизм называется центральным. Если  $e \neq 0$ , то механизм называется нецентральным или дезаксиальным.

В механизмах с роликом различают *действительный профиль* ( $ДП$ ) и *центральной профиль* ( $ЦП$ ) кулачка. Центральной профиль – это кривая, которую описывает центр ролика при обкате его по действительному профилю. Можно сказать также, что центральной профиль – это эквидистанта действительного профиля. Слово «эквидистанта» означает «равноудалённая», в нашем случае – удалённая на радиус ролика.

Чтобы построить центральной профиль, в каждой точке действительного профиля проводят к нему нормаль. На нормали откладывают радиус ролика. Соединяя концы отложенных отрезков, получают центральной профиль. Заменяя действительный профиль центральным и удаляя из механизма ролик, получают кинематически эквивалентную схему, упрощающую анализ и синтез механизма. Толкатель в такой схеме называют *игольчатый*.

В плоских кулачковых механизмах кулачок представляет собой некруглый диск с одним или несколькими горбами, возвышающимися над некоторой базовой окружностью, называемой начальной. Начальная окружность ( $НО$ ) существует как у действительного, так и у центрального профиля, для теории важна последняя, её радиус  $R_0$  называется *начальным*.

В общем случае в работе любого кулачкового механизма с одnogорбовым кулачком можно выделить четыре фазы движения толкателя: *фазу подъёма; верхнего выстоя; опускания; нижнего выстоя*. Одновременно с этим говорят также: удаление, приближение, дальнее стояние, ближнее стояние.

При вращении кулачка против часовой стрелки (см. рис. 1.1,  $a$ ) названным фазам соответствуют участки  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $da$  центрального профиля кулачка. Участки выстоя –  $bc$ ,  $da$  очерчены дугами окружностей, проведёнными из центра вращения кулачка. Точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  называются *границными*.

## 1.1 Анализ механизма со стержневым толкателем

Первоочередным для любого механизма является кинематический анализ. Применительно к кулачковому механизму этот анализ состоит в определении положения, скорости и ускорения толкателя по заданному положению, скорости и ускорению кулачка. При такой постановке задачи кулачок является входным звеном, толкатель – выходным. Положение звена характеризует его координата. *Зависимость координаты выходного звена от координаты входного называется функцией положения механизма.*

### 1.1.1 Функция положения

Задача нахождения функции положения может быть решена как графически, так и аналитически. При графическом решении, которым мы и ограничимся, схему вычерчивают в некотором масштабе. Для упрощения задачи действительный профиль кулачка заменяют центровым и удаляют из схемы ролик, стойку изображают в виде сплошной ломаной линии  $0$  (рис. 1.2,  $a$ ).

Отсчёт координат кулачка и толкателя ведут от начала фазы подъёма. Это начало характеризуется тем, что точка  $B$  толкателя, бывшая центром ролика в исходной схеме, опирается на точку  $a$  – первую граничную точку центрального профиля кулачка.

Координатой кулачка  $1$  считается угол его поворота  $\varphi$ , отсчитываемый от исходного положения прямой  $Aa$ , принадлежащей кулачку, до текущего положения  $Aa'$ . Координатой толкателя  $2$  считается расстояние  $s$  от исходного положения точки  $B$  толкателя до текущего положения  $B'$ . Исходное положение точки  $B$  является наименьшим, поэтому координата толкателя всегда положительна.

Функцией положения является зависимость  $s$  от  $\varphi$ . Очевидный способ установления этой зависимости состоит в построении профиля кулачка при разных значениях угла  $\varphi$  и последующем измерении расстояния  $s$ . Однако многократное построение кривой, по которой очерчен кулачок, трудоёмко. Чтобы преодолеть это затруднение, механизм переставляют на кулачок, и вместо поворота кулачка, на тот же угол, но в обратную сторону, поворачивают стойку вместе с толкателем. Форма стойки и толкателя проста, и повторное изображение этих звеньев не вызывает затруднений. Вращение стойки

относительно кулачка называется *обращением движения* (рис. 1.2, б).

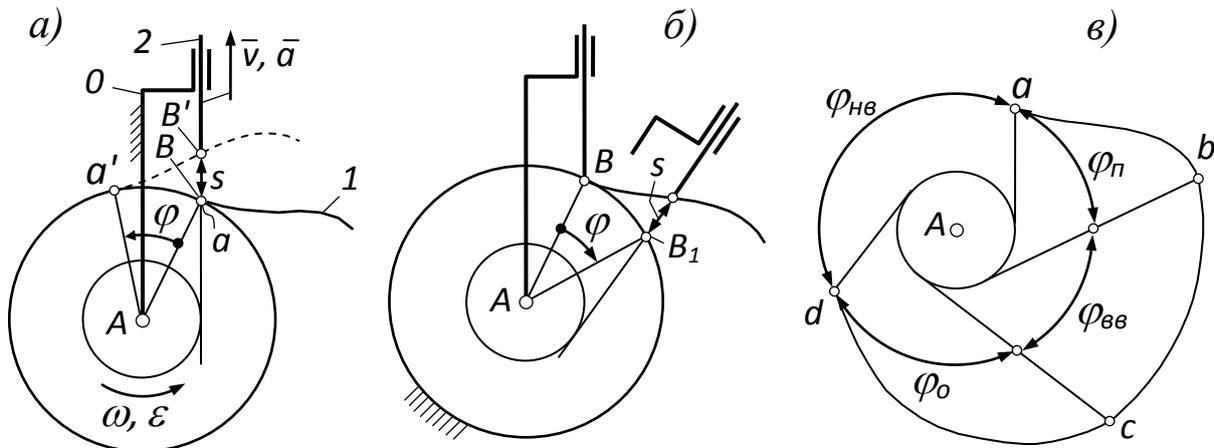


Рис. 1.2

После поворота стойки прямая  $AB$ , принадлежащая этой стойке, занимает положение  $AB_1$ . Ось толкателя, всегда проходящая через точку  $B$  стойки и касающаяся окружности эксцентриситета, проходит через положение  $B_1$  этой точки и остаётся касательной к окружности эксцентриситета. Отрезок  $s$  оси толкателя, отсекаемый начальной окружностью и центровым профилем кулачка, есть искомая координата толкателя. Повторяя рассмотренные построения для других значений угла  $\varphi$ , находят соответствующие значения  $s$  и по ним строят график зависимости  $s \varphi$  (рис. 1.3, а).

Четырём фазам движения толкателя соответствуют четыре угла поворота кулачка, называемых фазовыми:

- $\varphi_{\Pi}$  – угол фазы подъёма;  $\varphi_{\text{ВВ}}$  – верхнего выстоя;
- $\varphi_{\text{ОП}}$  – опускания;  $\varphi_{\text{НВ}}$  – нижнего выстоя.

Определение фазовых углов показано на рис. 1.2, в. Границы этих углов лежат на начальной окружности в местах пересечения её с касательными к окружности эксцентриситета, причём касательные проходят через граничные точки  $a, b, c, d$ . Перед выбором значений угла  $\varphi$  имеет смысл сначала определить фазовые углы.

Следующая задача анализа – определение скорости и ускорения толкателя. Как будет ясно из дальнейшего, эти величины зависят от первой и второй производной от  $s$  по  $\varphi$ . Графики производных строят одним из методов графического дифференцирования. Принципиально точным является метод касательных. Согласно

этому методу в точке дифференцирования, например  $A$ , проводят касательную  $t-t$  (рис. 1.3,  $a$ ).

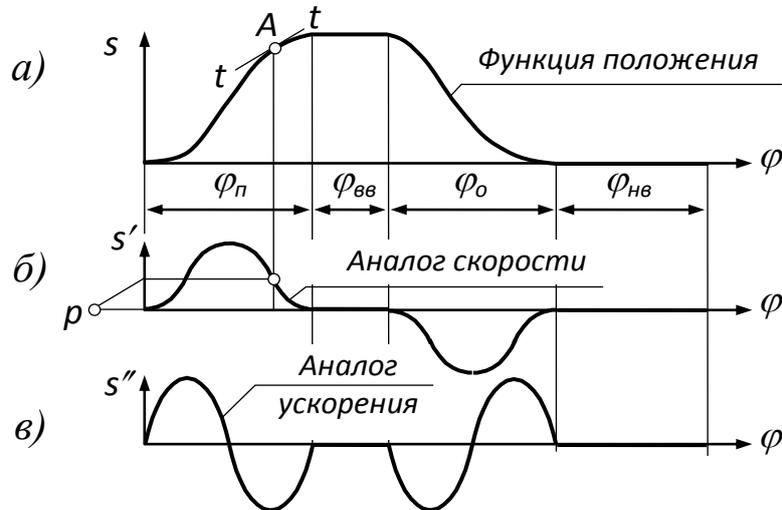


Рис. 1.3

Из произвольной точки  $p$ , лежащей на оси  $\varphi$  следующего графика, проводят луч, параллельный  $t-t$ . Отрезок оси  $s'$ , отсекаемый лучом, изображает в некотором масштабе производную в точке  $A$ . Продолжая дифференцирование, из той же точки  $p$  проводят лучи, параллельные другим касательным к кривой  $s(\varphi)$ .

### 1.1.2 Скорость и ускорение толкателя

Скорость  $v$  толкателя есть производная от его координаты  $s$  по времени  $t$ :  $v = \frac{ds}{dt}$ . Координата есть сложная функция времени:  $s = s(\varphi)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Данная запись означает, что  $s$  зависит от  $\varphi$ , а  $\varphi$  — от  $t$ . При этом  $v = \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$ . Поскольку  $\frac{d\varphi}{dt}$  — это скорость кулачка  $\omega$ , то

$$\boxed{v = \frac{ds}{d\varphi} \omega}. \quad (1.1)$$

В рамку взяты формулы, которые необходимо знать наизусть. Ускорение  $a$  толкателя есть производная по времени от его скорости. Как показывает формула (1.1), скорость представляет собой произведение двух переменных —  $\frac{ds}{d\varphi}$  и  $\omega$ , причём,  $\frac{ds}{d\varphi}$  есть известная нам функция угла  $\varphi$  (см. рис. 1.3,  $b$ ), а  $\varphi$ , как и прежде, некоторая функция  $t$ . С учётом всего этого

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} \omega + \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\omega}{dt}.$$

Поскольку  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ , а  $\frac{d\omega}{dt}$  – это ускорение кулачка  $\varepsilon$ , то

$$a = \frac{d^2s}{d\varphi^2} \omega^2 + \frac{ds}{d\varphi} \varepsilon. \quad (1.2)$$

Используя компактные формы обозначения производных, формулы (1.1), (1.2) представляют в виде  $v = s'\omega$ ,  $a = s''\omega^2 + s'\varepsilon$ . Эти формулы, в любом их виде, применимы ко всем механизмам, у которых движение на входе вращательное, а на выходе поступательное.

### 1.1.3 Кинематический смысл производных от функции положения

Из формулы (1.1) следует, что первая производная равна отношению скорости толкателя к скорости кулачка:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{v}{\omega}. \quad (1.3)$$

Отношение скоростей каких-либо звеньев или отдельных точек этих звеньев назовём *передаточным отношением*<sup>1</sup> (в соответствующем направлении). Тогда *первая производная функции положения механизма – это передаточное отношение* в направлении от выходного звена механизма к входному.

*Вторая производная – это своеобразная скорость изменения передаточного отношения.* Своеобразие состоит в том, что в роли времени выступает координата входного звена. Уподобляя времени, её следует наращивать равномерно.

Из формул (1.1), (1.2) вытекает, что при равномерном вращении кулачка ( $\omega = \text{const}$ ) скорость толкателя пропорциональна первой производной от  $s$  по  $\varphi$ , а ускорение пропорционально второй производной. На этом основании указанные производные называют *аналогом скорости и аналогом ускорения* толкателя. На том же основании графики, изображённые на рис. 1.3, называют кинематическими диаграммами, хотя это чисто геометрические характеристики механизма.

Передаточное отношение, выражаемое формулой (1.3), можно найти также с помощью мгновенного центра вращения (МЦВ) толкателя относительно кулачка (или наоборот).

<sup>1</sup> В узком, но общепринятом смысле, передаточным называют отношение только угловых скоростей, и применяют это понятие только к вращающимся звеньям, например зубчатым колёсам.

## 1.1.4 Передаточное отношение – через МЦВ

В механизме, изображённом на рис. 1.2, *a*, найдём МЦВ толкателя относительно кулачка. Для этого переставим механизм на кулачок (рис. 1.4, *a*).

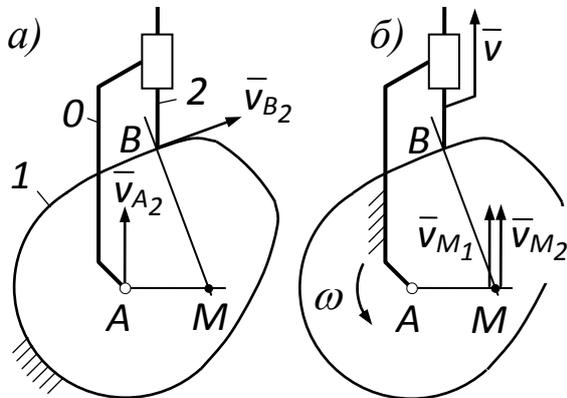


Рис. 1.4

Из теоретической механики известно, что мгновенный центр вращения тела совпадает с мгновенным центром скоростей и находится на пересечении перпендикуляров к скоростям каких-нибудь двух точек этого тела, в данном случае – толкателя. Точка *B* толкателя движется по профилю кулачка и, следовательно, её скорость  $v_{B_2}$

направлена по касательной к этому профилю. Толкатель вращается со стойкой и движется поступательно относительно стойки. Скорость любой точки толкателя равна геометрической сумме вращательной и поступательной составляющих. Точка *A* толкателя имеет только поступательную составляющую, эта составляющая и есть результирующая скорость  $v_{A_2}$  точки *A* толкателя. На пересечении перпендикуляров к скоростям  $v_{B_2}$  и  $v_{A_2}$  находится искомый мгновенный центр вращения *M*.

По свойству мгновенного центра скорость точки *M* толкателя относительно кулачка равна нулю –  $v_{M_2,1} = 0$ . Из нулевой относительной скорости следует равенство абсолютных скоростей, а именно:  $v_{M_2} = v_{M_1}$  (рис. 1.4, *б*).

Выражая скорости точек  $M_2, M_1$  через скорости своих звеньев, получают:  $v = \omega \cdot AM$ . Отсюда передаточное отношение

$$\boxed{\frac{v}{\omega} = AM}. \quad (1.4)$$

Данный результат можно представить также в виде  $\frac{ds}{d\varphi} = AM$  или, коротко,  $s' = AM$ . Определение передаточного отношения таким способом целесообразно, когда нужно быстро и точно – по сравнению с методом диаграмм – получить это отношение для заданного положения механизма. Этот способ важен также для синтеза механизма.

## 1.2 Синтез механизма со стержневым толкателем

Основное условие синтеза состоит в том, чтобы удовлетворить одной из кинематических диаграмм, например  $s(\varphi)$ . Дополнительным условием является неперевышение допустимых углов давления  $\vartheta_{д,п}$ ,  $\vartheta_{д,о}$  на фазе подъёма и опускания соответственно.

### 1.2.1 Угол давления

Угол давления – это угол  $\vartheta$  между силой  $F$  и скоростью  $v$  точки приложения силы. Из определения следует, что это угол давления движущего звена на движимое. В кулачковых механизмах речь идет о силе  $F$ , действующей со стороны кулачка на толкатель (рис. 1.5).

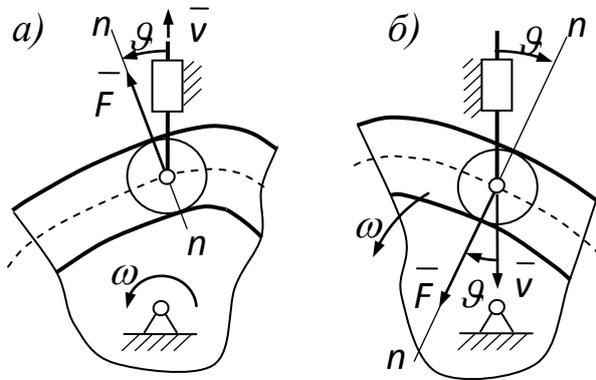


Рис. 1.5

Чтобы не усложнять вопрос об угле давления, его определяют без учёта сил трения. При таком допущении сила  $F$  действует по нормали  $n-n$  к профилю кулачка – действительному и центральному. На фазе подъёма (вид *a*)  $\vartheta > 0$ , на фазе опускания (вид *б*)  $\vartheta < 0$ .

Почему важен угол давления?

Как видно по рис. 1.6, где изображены два кулачка, сообщающих толкателю один и тот же закон движения, с увеличением угла давления (сравните  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$ ) возрастает сила  $F$ , необходимая для преодоления одного и того же полезного сопротивления, равного и противоположного  $F_y$ . Кроме того, возрастает вредная составляющая  $F_x$ , увеличивающая силы трения в направляющей толкателя. Как следствие, снижается КПД механизма. По этим причинам угол давления не должен быть слишком большим.

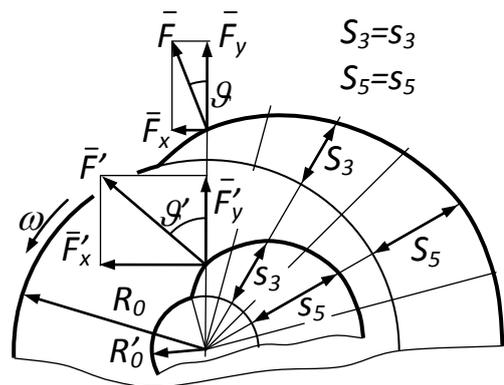


Рис. 1.6

Кроме того, существует такое значение  $\vartheta_c$  угла давления, по достижении которого толкатель останавливается и не может сдви-

нуться с места, даже при отсутствии какого-либо полезного сопротивления. Такое явление называется *самоторможением*, а  $\vartheta_c$  – углом самоторможения. Опасность самоторможения является ещё одним основанием для ограничения угла давления.

На рис. 1.2 показано, что перемещение толкателя определяют только отрезки  $s$ , заключенные между начальной окружностью и профилем кулачка. Это значит, что одну и ту же диаграмму  $s \varphi$  и её производные могут иметь кулачки не только с разными начальными радиусами, как на рис. 1.6, но и разными эксцентриситетами. На рис. 1.7 показано влияние эксцентриситета на углы давления.

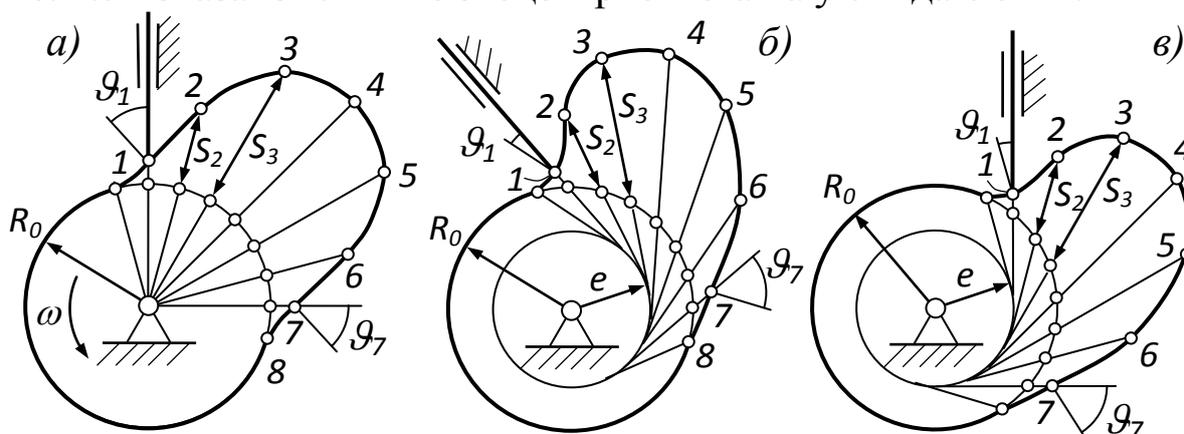


Рис. 1.7

На виде *a* изображён механизм без эксцентриситета, на виде *б* – с эксцентриситетом  $e$ . Оба кулачка имеют один и тот же начальный радиус и сообщают толкателю один и тот же закон движения. Введение эксцентриситета равносильно развороту отрезков  $s_2, s_3$  и им подобным вокруг своих оснований на один и тот же угол. В результате разворота профиль кулачка деформируется, однако закон движения толкателя не меняется; углы давления на фазе подъёма уменьшаются (сравните углы  $\vartheta_1$ ), на фазе опускания увеличиваются (сравните  $\vartheta_7$ ). Первое желательно, второе нежелательно, но допустимо. Вертикальное положение толкателя восстанавливают поворотом стойки (рис. 1.7, *в*).

Синтез кулачкового механизма начинают с определения начального радиуса и эксцентриситета. Это делают с помощью диаграммы  $s(s')$  – «перемещение – передаточное отношение». Ниже рассматривается построение и свойства этой диаграммы.

1.2.2 Диаграмма «перемещение – передаточное отношение»

Для изучения свойств диаграммы её строят, опираясь на схему уже созданного механизма (рис. 1.8).

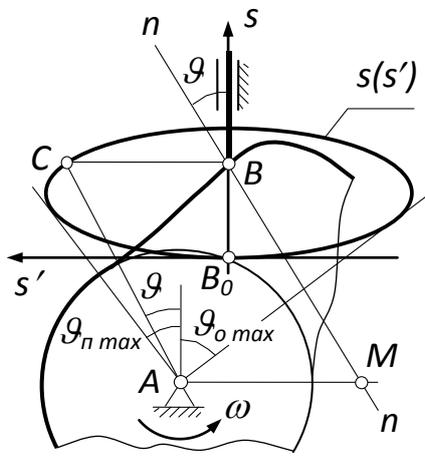


Рис. 1.8

Через точку касания  $B$  кулачка и толкателя проводят нормаль  $n-n$  к профилю кулачка. Показывают угол давления  $\vartheta$ . Из центра вращения кулачка проводят прямую, перпендикулярную толкателю. Как известно из п. 1.1.4, на пересечении с нормалью находится мгновенный центр вращения  $M$  толкателя относительно кулачка и отрезок  $AM = s'$ .

Из точки  $A$  проводят прямую, параллельную нормали  $n-n$ , а из точки  $B$  – прямую, параллельную  $AM$ . На пересечении отмечают точку  $C$ .

Относительно наинизшего положения  $B_0$  конца толкателя точка  $C$  имеет координаты  $B_0B = s$  и  $BC = AM = s'$ . Следовательно,  $C$  – это одна из точек диаграммы  $s s'$ . Левая половина диаграммы соответствует фазе подъёма, правая – фазе опускания.

На фазе подъёма величина  $s'$  имеет положительные значения (см. рис. 1.3). Чтобы этому не противоречить, ось  $s'$  на рис. 1.8 направляют влево. Из построения диаграммы  $s(s')$  вытекают следующие её свойства:

- 1) каждая точка диаграммы однозначно характеризует фазу движения механизма;
- 2) прямая, идущая из центра кулачка в какую-либо точку диаграммы, образует с осью  $s$  угол, равный углу давления для соответствующего положения механизма;
- 3) касательные к диаграмме образуют с осью  $s$  максимальные для данного механизма углы давления:  $\vartheta_{n \max}$  – на фазе подъёма и  $\vartheta_{o \min}$  – на фазе опускания.

Пусть найденные максимальные углы давления равны допустимым. Тогда, убрав из построений кулачок, его центр находят на пересечении касательных, проведённых к диаграмме  $s(s')$  под допустимыми углами давления. На этом и основан первый этап синтеза.

### 1.2.3 Определение начального радиуса и эксцентриситета

По диаграммам  $s(\varphi)$  и  $s'(\varphi)$  (см. рис. 1.3) строят диаграмму  $s(s')$  (рис. 1.9), которую уместно назвать теперь объединённой.

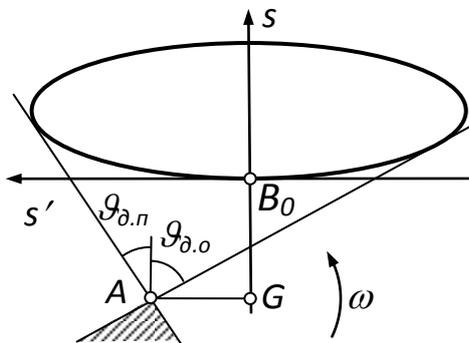


Рис. 1.9

Масштабные коэффициенты по осям объединённой диаграммы принимают одинаковыми. Это требование вытекает из построений, приведённых на рис. 1.8, где всё изображено в одном масштабе. Полагая, что синтезируемый кулачок вращается против часовой стрелки, ось  $s'$  направляют влево.

К построенной диаграмме проводят касательные под допустимыми углами

давления  $\vartheta_{д.п}$ ,  $\vartheta_{д.о}$ . Обычно  $\vartheta_{д.п} < \vartheta_{д.о}$ , т. к. условия работы механизма на фазе подъёма тяжелее, чем на фазе опускания. В точку пересечения касательных помещают центр кулачка  $A$ . При этом искомым начальным радиусом  $R_0 = AB_0$ , эксцентриситет  $e = AG$ .

Центр кулачка можно поместить также в любую точку заштрихованной зоны, при этом максимальные углы давления не будут достигать допустимых значений, что хорошо, но начальный радиус не будет наименьшим.

### 1.2.4 Построение профиля кулачка

Профиль кулачка строят в порядке, обратном анализу (рис. 1.2, б). Отложив угол  $\varphi$ , проводят ось толкателя и откладывают на ней отрезок  $s$ , снятый с диаграммы  $s(\varphi)$ . Конец отрезка есть первая точка искомого профиля, остальные находят аналогично.

Синтез завершается построением действительного профиля *ДП*. Он удалён от центрального профиля *ЦП* на радиус ролика  $r$ . Радиус ролика не должен превышать наименьший радиус кривизны  $\rho_{\min}$  выпуклой части центрального профиля – во избежание заострения или даже самопересечения действительного профиля.

Выше всё время предполагалось, что синтезируемый механизм имеет геометрическое замыкание. При силовом замыкании угол давления имеет прежний смысл и значение только на фазе подъёма. На фазе опускания это просто острый угол между нормалью и осью толкателя. Однако его всё равно ограничивают, т. к. само торможение угрожает толкателю и на фазе опускания. Оно проявляется в виде периодического зависания толкателя, вследствие чего он опускается скачкообразно.

## 1.3 Механизм с коромысловым толкателем

### 1.3.1 Функция положения и её производные

Функция положения в данном механизме представляет собой зависимость  $\psi(\varphi)$  – угла поворота толкателя 2 от угла поворота кулачка 1 (рис. 1.10, а). Как и в случае стержневого толкателя, функция положения отыскивается методом обращения движения. Для этого механизм переставляют на кулачок и поворачивают стойку на угол  $\varphi$  (рис. 1.10, б).

В результате поворота треугольник  $AB_0C_0$ , принадлежащий стойке, переходит в положение  $AB_1C_1$ . Угол  $\psi$ , соответствующий  $\varphi$ , измеряют между наинизшим –  $C_1B_1$  и текущим –  $C_1B$  положением толкателя. Аналогично находят другие пары значений  $\varphi, \psi$ .

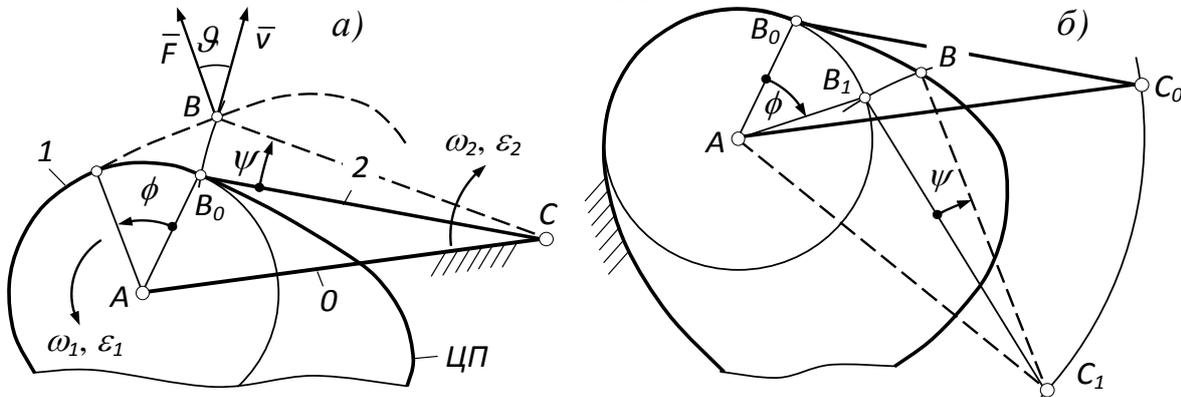


Рис. 1.10

По найденным значениям строят график функции положения  $\psi(\varphi)$ . Дифференцированием находят первую и вторую производную от  $\psi$  по  $\varphi$ . Графики функции  $\psi(\varphi)$  и её производных имеют такой же характерный вид, как и показанные на рис. 1.3. Разница лишь в том, что вместо буквы  $s$  везде будет стоять  $\psi$ . Производные, как и прежде, называются аналогами. Их связь со скоростью  $\omega_2$  и ускорением  $\varepsilon_2$  толкателя определяют формулы

$$\omega_2 = \frac{d\psi}{d\varphi} \omega_1, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \omega_1^2 + \frac{d\psi}{d\varphi} \varepsilon_1. \quad (1.6)$$

В компактной форме  $\omega_2 = \psi' \omega_1, \quad \varepsilon_2 = \psi'' \omega_1^2 + \psi' \varepsilon_1$ .

Формулы выводятся аналогично (1.1), (1.2) и применимы ко всем механизмам с вращательным движением на входе и выходе.

Из формулы (1.4) следует, что

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (1.7)$$

т. е. первая производная равна передаточному отношению, причём, в общепринятом смысле этого понятия.

Угол давления  $\vartheta$  в данном механизме показан на рис. 1.10, *a*. Сила  $F$  направлена по нормали к профилю кулачка, скорость  $v$  точки приложения силы перпендикулярна линии толкателя  $BC$ .

### 1.3.2 Передаточное отношение – через МЦВ

Найдём мгновенный центр вращения толкателя относительно кулачка в механизме, изображённом на рис. 1.10, *a*. Для этого представим механизм на кулачок (рис. 1.11, *a*).

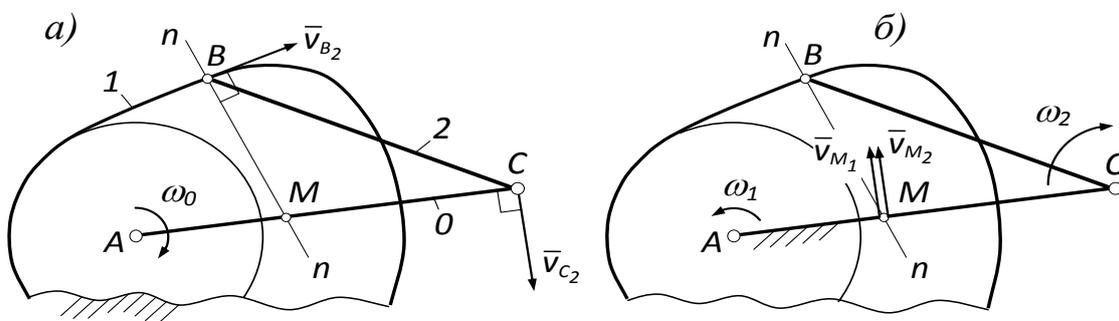


Рис. 1.11

Относительно кулачка стойка вращается вокруг точки  $A$ , толкатель совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки  $B$  толкателя направлена по касательной к профилю кулачка, скорость точки  $C$  перпендикулярна  $AC$ . Перпендикуляры к скоростям пересекаются в точке  $M$ , следовательно, эта точка есть искомый мгновенный центр вращения.

Как и в предыдущей схеме (рис. 1.4),  $v_{M_2} = v_{M_1}$ . Но  $v_{M_2} = \omega_2 \cdot CM$ ;  $v_{M_1} = \omega_1 \cdot AM$ . Отсюда передаточное отношение  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{AM}{CM}$ .

С учётом формулы (1.7), получают:  $\frac{AM}{CM} = \frac{d\psi}{d\varphi}$  или

$$\frac{AM}{CM} = \psi'. \quad (1.8)$$

### 1.3.3 Диаграмма «перемещение – передаточное отношение»

Как и в схеме со стержневым толкателем, сначала полагают, что искомый механизм уже создан (рис. 1.12, *a*). Через точку касания  $B$  кулачка и толкателя проводят нормаль  $n-n$  к профилю кулачка.

Показывают угол давления  $\vartheta$ . На пересечении нормали с линией стойки  $AC$  получают мгновенный центр вращения  $M$  толкателя относительно кулачка.

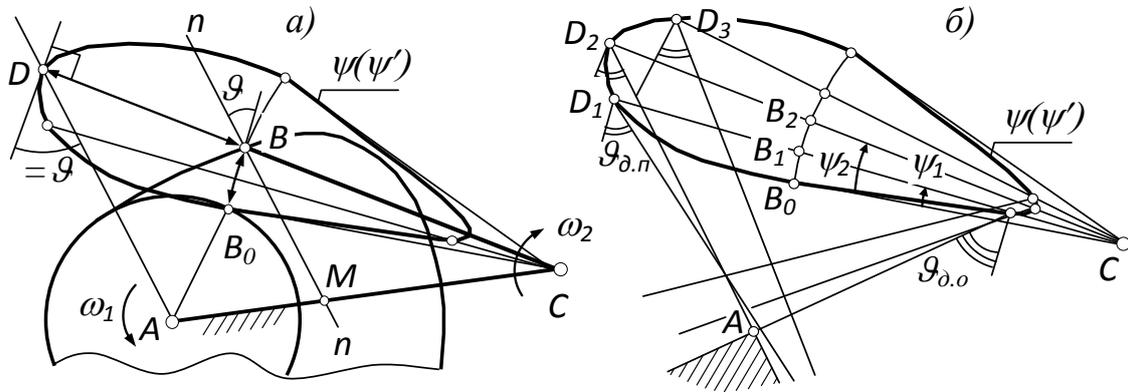


Рис. 1.12

Из центра кулачка  $A$  проводят прямую, параллельную нормали. На пересечении с продолжением толкателя отмечают точку  $D$ . Из точки  $D$  восстанавливают перпендикуляр к линии толкателя  $CD$ . Прямая  $AD$  образует с этим перпендикуляром угол  $\vartheta$ , равный углу давления в точке  $B$ .

Из подобия треугольников  $DCA$  и  $BCM$  вытекает пропорция  $\frac{BD}{BC} = \frac{AM}{CM}$ . Из пропорции выводят:  $BD = BC \frac{AM}{CM}$ . Обозначив длину толкателя  $BC$  через  $l_{BC}$  и учитывая формулу (1.8), получают:

$$BD = l_{BC} \psi'. \quad (1.9)$$

Точка  $B_0$  указывает наименьшее положение конца толкателя. Положение точки  $D$  относительно  $B_0$  характеризует дуга  $B_0B$  и отрезок  $BD$ . Дуга  $B_0B = l_{BC} \psi$ .

Если точки, подобные  $D$ , построить для всех положений механизма, то они образуют замкнутую кривую  $\psi(\psi')$ , которую при  $l_{BC} = 1$  можно считать диаграммой «перемещение – передаточное отношение». Естественно ожидать, что диаграммы  $\psi(\psi')$  и  $s(s')$  обладают сходными свойствами:

- 1) каждая точка диаграммы  $\psi(\psi')$  однозначно характеризует положение механизма;
- 2) прямая, идущая из центра кулачка в какую-либо точку диаграммы, позволяет определить угол давления.

Но вот касательные к диаграмме указывают уже не максимальные углы давления. Удалив из построенной картины кулачок, мы не сможем сказать, как прежде, что его центр находится на пересечении касательных, проведённых к диаграмме под максимальными углами давления. Несмотря на это, выход есть: положение центра кулачка, а значит начального радиуса и длины стойки, можно найти с помощью второго свойства диаграммы  $\psi(\psi')$ .

#### 1.3.4 Определение начального радиуса и длины стойки

По диаграммам  $\psi(\varphi)$ ,  $\psi'(\varphi)$  строят диаграмму  $\psi(\psi')$ , называемую, как и в предыдущей схеме кулачкового механизма, объединённой. Начальное положение  $B_0C$  толкателя выбирают произвольно (рис. 1.12, б).

От этого положения откладывают углы  $\psi_1, \psi_2$  и т. д., снятые с диаграммы  $\psi(\varphi)$ . Отрезки  $B_1D_1, B_2D_2$  и т. д. вычисляют по формуле (1.9) и откладывают вдоль толкателя в одном с ним масштабе. Как и в механизме со стержневым толкателем, положительные значения  $BD$  откладывают «по ходу кулачка», отрицательные – навстречу. Соединяя точки  $D_1, D_2$  и т. д. плавной кривой, получают диаграмму  $\psi \psi'$ .

Из каждой пронумерованной точки диаграммы проводят лучи под допустимыми углами давления: слева – под углами  $\mathcal{G}_{д.п}$ , справа – под углами  $\mathcal{G}_{д.о}$ . Область чертежа, лежащую ниже любого луча, выделяют штриховкой. Это область допустимого положения центра кулачка. Чтобы размеры кулачка были наименьшими, его центр располагают при вершине  $A$  заштрихованной области. При этом начальный радиус  $R_0 = AB_0$ , длина стойки  $l_0 = AC$ .

Центровой профиль кулачка строят в порядке, обратном анализу (см. п. 1.3.1). Ролик выбирают по тем же правилам, что и в механизме со стержневым толкателем. Построение действительного профиля также не содержит ничего нового.

## 1.4 Механизм с тарельчатым толкателем

### 1.4.1 Анализ механизма

Функция положения данного механизма есть зависимость  $s(\varphi)$  (рис. 1.13, а). Зависимость устанавливают методом обращения движения. Согласно методу, сначала изображают исходное положение, соответствующее началу подъема толкателя (рис. 1.13, б). Затем поворачивают стойку на заданный угол  $\varphi$  и строят соответствующее положение толкателя. При этом исходят из того, что его тарелка  $2a$  перпендикулярна ножке  $2b$  и в то же время касается профиля кулачка. Искомое перемещение  $s$  толкателя измеряют, как показано на рисунке.

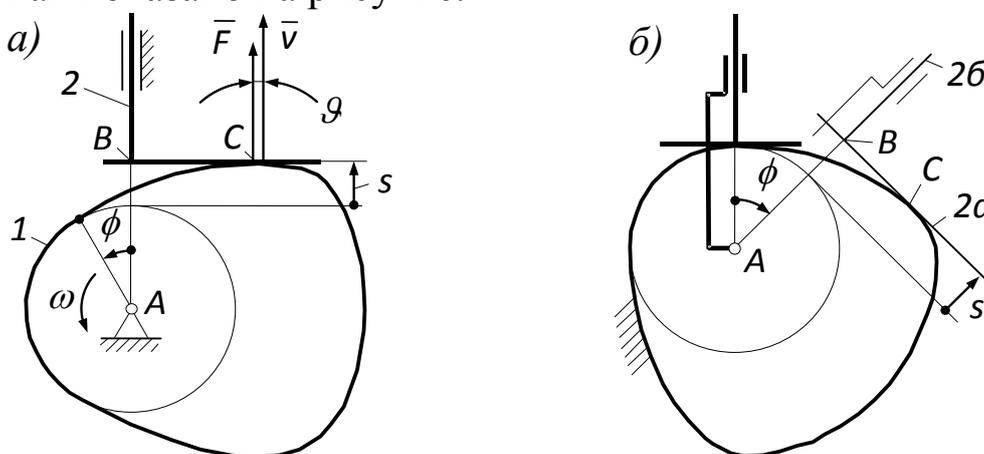


Рис. 1.13

Аналог скорости и ускорения толкателя получают так же, как в предыдущих схемах, т. е. дифференцированием функции положения. Угол давления  $\vartheta$ , заключенный, согласно определению, между силой  $F$  и скоростью  $v$ , постоянно равен нулю.

### 1.4.2 Синтез механизма

Основным и дополнительным условиями синтеза являются соответствие заданным кинематическим диаграммам и отсутствие на профиле кулачка вогнутых участков. Такая особенность профиля называется невогнутостью. Цель синтеза – найти начальный радиус  $R_0$  и построить профиль кулачка.

Начальный радиус находят с помощью диаграммы  $s(s'')$ , которую строят на основе диаграмм  $s(\varphi)$  и  $s''(\varphi)$ . Пусть последние имеют вид, показанный на рис. 1.3, тогда диаграмма  $s(s'')$  будет выглядеть, как показано на рис. 1.14.

Ось  $s''$  диаграммы направляют вправо, независимо от направления вращения кулачка, масштаб по обеим осям принимают одинаковым.

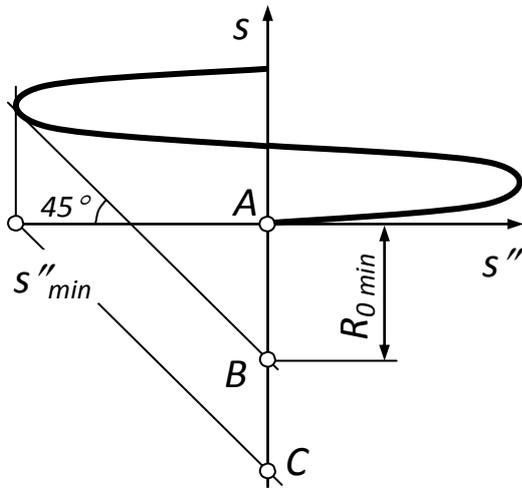


Рис. 1.14

К левой части кривой  $s(s'')$  проводят касательную под углом  $45^\circ$  к любой из координатных осей. Начальный радиус, гарантирующий невогнутость профиля кулачка, должен быть не меньше расстояния  $AB$  от начала координат до точки пересечения касательной с осью  $s$ .

В отличие от механизмов, рассмотренных выше, начальный радиус не следует брать минимальным, т. к. радиус кривизны профиля кулачка на

границе с участком выстоя будет равен нулю, что недопустимо по прочностным соображениям. Практически начальный радиус принимают равным отрезку  $AC$ , который, в свою очередь, равен  $s''_{\min}$ .

Построение профиля кулачка. Как и при анализе, изображают начальное положение механизма (рис. 1.13, б). Профиля кулачка пока нет. Стойку поворачивают на заданный угол  $\varphi$ . С диаграммы  $s(\varphi)$  снимают соответствующее  $s$  и откладывают от начальной окружности по оси толкателя. Изображают тарелку толкателя. Она располагается перпендикулярно ножке. Далее всё повторяют для других значений  $\varphi$ . Искомый профиль кулачка есть *огibaющая* всех положений тарелки толкателя. Для более точного построения *огibaющей* можно исходить из того, что расстояние  $BC = \frac{ds}{d\varphi}$ , т. е. равно передаточному отношению или, иначе, аналогу скорости толкателя. При синтезе его снимают с кинематических диаграмм.

## 2 Зубчатые механизмы

Простейший зубчатый механизм состоит из двух зубчатых колёс, образующих зацепления с параллельными, пересекающимися или скрещивающимися осями вращения. Зацепления с параллельными осями называют цилиндрическими. Они могут быть прямозубыми и косозубыми.

### 2.1 Цилиндрические прямозубые зацепления

Зацепление этого вида показано во введении на виде *в*. Геометрию и кинематику таких зацеплений анализируют по двумерной модели (вид *е*, там же), называемой *плоским зацеплением*. Основная задача анализа состоит в определении передаточного отношения.

#### 2.1.1 Определение передаточного отношения через числа зубьев

Анализируемый механизм преобразует вращательное движение со скоростью  $\omega_1$  во вращательное со скоростью  $\omega_2$ . Младший индекс в обозначении присваивают меньшему из двух колёс. Величина  $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  называется передаточным отношением от колеса 1 к колесу 2. Соответственно,  $u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ . Напомним (п. 1.1.3), что *передаточное отношение – это отношение скоростей*. Как очевидно,  $u_{12} u_{21} = 1$ .

Выразим отношение  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  через числа зубьев колёс  $z_1, z_2$ . Пусть за время  $t$  колесо 1 повернулось на  $n$  своих зубьев. На столько же зубьев повернётся колесо 2. Углы поворота колёс составят:

$\varphi_1 = 360^\circ \frac{n}{z_1}$ ;  $\varphi_2 = 360^\circ \frac{n}{z_2}$ . Полагая, что вращение было равномерным, получим скорости:  $\omega_1 = \frac{\varphi_1}{t}$ ;  $\omega_2 = \frac{\varphi_2}{t}$ . Их отношение

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}}. \quad (2.1)$$

Согласно формуле, *скорости колёс обратно пропорциональны числам их зубьев*.

При выводе формулы предполагалось, что скорости колёс постоянны. Это возможно лишь при специально подобранных профилях зубьев (очертаниях боковых сторон). При случайных профилях и постоянной скорости одного из колёс скорость другого будет, скорее всего, переменной, колеблющейся около некоторого среднего значения. Точно так же будет вести себя и передаточное отношение. В частности,  $u_{21}$  будет колебаться около значения  $\frac{z_1}{z_2}$ . Следовательно, формула (2.1) выражает лишь *среднее передаточное отношение*.

### 2.1.2 Определение передаточного отношения через профили зубьев

Изобразим схему зацепления, оставив на каждом колесе по одному зубу (рис. 2.1, а), и найдём мгновенный центр скоростей колеса 2 относительно колеса 1. Для этого переставим механизм на колесо 1 (рис. 2.1, б).

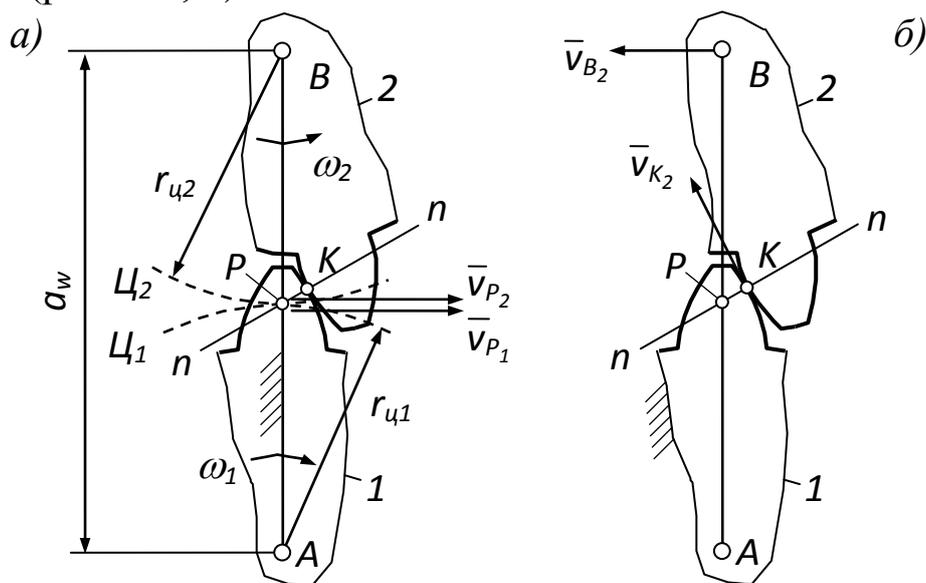


Рис. 2.1

Мгновенный центр скоростей должен находиться на пересечении перпендикуляров к скоростям каких-нибудь двух точек колеса 2. Очевидна, по направлению, скорость  $v_{B_2}$  точки  $B_2$ , она перпендикулярна  $AB$ . Не столь очевидна, но всё же определима скорость  $v_{K_2}$  точки  $K_2$ . Как бы ни двигалась точка  $K_2$ , её траектория не пересекает профиль зуба колеса 1. Из непересечения следует касание. Через точку касания любого количества кривых можно провести единственную касательную, вдоль неё и направлена скорость  $v_{K_2}$ . Ис-

комый мгновенный центр скоростей находится на пересечении  $P$  перпендикуляров к скоростям  $v_{B_2}$ ,  $v_{K_2}$ . Этим центром является точка  $P_2$ . Заметим попутно – точка  $P_1$ , совпадающая с  $P_2$ , называется мгновенным центром вращения колеса 2 относительно 1.

По свойству мгновенного центра скоростей  $v_{P_2,1} = 0$ , т. е. скорость точки  $P_2$  относительно колеса 1 равна нулю. Отсюда  $v_{P_2} = v_{P_1}$  (см. рис. 2.1, а).

Выражая скорости точек  $P_2$ ,  $P_1$  через скорости своих звеньев, получают:  $\omega_2 \cdot BP = \omega_1 \cdot AP$ . Отсюда передаточное отношение

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{AP}{BP}}. \quad (2.2)$$

В отличие от среднего, это точное передачное отношение. Оно называется *мгновенным*, относящимся только к данной фазе зацепления. Профили зубьев должны быть подобраны так, чтобы мгновенное передачное отношение в любой фазе зацепления было равно среднему, определяемому числами зубьев.

В плоском зацеплении мгновенный центр вращения и мгновенный центр скоростей одного колеса относительно другого называется *полюсом зацепления*. Можно сказать также, что полюс зацепления – это точка, в которой скорости зубчатых колёс равны друг другу.

Из решения задачи о мгновенном передачном отношении вытекает основная теорема плоского зацепления: *«Нормаль к профилям зубьев, проведённая через точку их касания, пересекает линию центров в полюсе зацепления и делит эту линию на части, обратно пропорциональные скоростям колёс».*

### 2.1.3 Центроиды зацепления

Центроиды состоят из точек  $P_1$ ,  $P_2$ , построенных во всех возможных фазах движения механизма. Периодически останавливая работающее зацепление и протыкая плоскости обоих колёс в полюсе зацепления, получают сразу две центроиды  $C_1$ ,  $C_2$  (см. рис. 2.1, а).

Если передачное отношение постоянно, то центроиды получаются круглыми, именно это подразумевается на рисунке. Центроиды обладают двумя важными свойствами: они всегда касаются друг друга

и перекатываются друг по другу без скольжения. Первое свойство вытекает из принципа образования центроид – проколами сразу двух плоскостей, второе следует из равенства скоростей в точке касания. Радиусы круглых центроид выводят из системы

$$\begin{aligned} r_{ц1} + r_{ц2} &= a_w, \\ \frac{r_{ц1}}{r_{ц2}} &= \frac{z_1}{z_2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое уравнение системы вытекает из свойства центроид всегда касаться друг друга, второе получается из равенства правых частей уравнений (2.1), (2.2).

Первое научно обоснованное зацепление, обладающее постоянным передаточным отношением в любой фазе зацепления, было циклоидальным.

#### 2.1.4 Идея циклоидального зацепления

Циклоида – это кривая, которую описывает точка окружности, перекатывающейся по прямой или другой окружности. В первом случае циклоида называется обыкновенной, во втором – эпициклоидой или гипоциклоидой. Приставка *эпи-* используется, если перекатывание происходит по внешней стороне неподвижной окружности, *гипо* – если по внутренней.

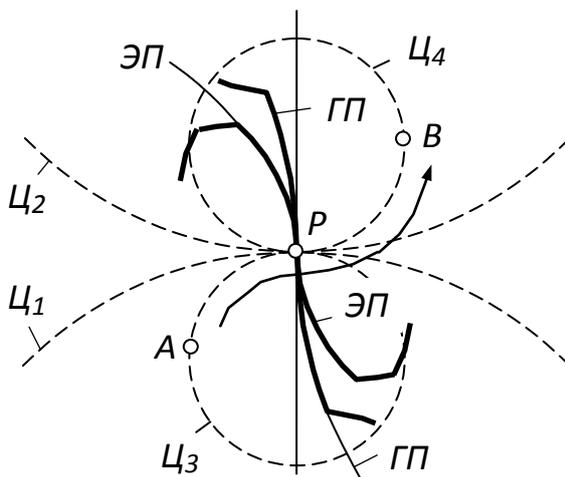


Рис. 2.2

Эпициклоиду изобрёл и указал на возможность её использования для профилирования зубьев французский геометр и военный инженер Жерар Дезарг около 1650 г. Образование циклоидального зацепления показано на рис. 2.2.

По произвольным окружностям  $Ц_1, Ц_2$ , вращающимся вокруг своих центров, прокатываются окружности  $Ц_3, Ц_4$ , вращающиеся также вокруг своих центров. Ввиду взаимного качения все эти окружности являются центроидами. На центроиде  $Ц_3$  размещена рисующая точка, которая начинает свой путь из некоторого положения  $A$ . Достигнув положения  $P$ , рисующая точка перемещается

на центроиду  $\mathcal{C}_4$  и завершает свой путь в точке  $B$ . Зацепление изображено для момента, когда из положения  $B$  рисующую точку вернули в положение  $P$ .

Профиль зуба каждого колеса состоит из эпициклоиды  $\mathcal{ЭП}$  и гипоциклоиды  $\mathcal{ГП}$ . Чтобы построить участки профилей, расположенные, например, внутри центроиды  $\mathcal{C}_1$ , нужно остановить механизм и, закрепив рисующую точку на центроиде  $\mathcal{C}_3$ , покатать её сначала внутри центроиды  $\mathcal{C}_1$ , затем снаружи центроиды  $\mathcal{C}_2$ .

Двигаясь по составной дуге  $APB$ , рисующая точка оказывается одновременно точкой касания зубьев. Траектория  $APB$  точки касания зубьев называется *линией зацепления*.

Свое первое применение циклоидальные профили нашли в часовых механизмах и сохранились там до сих пор. В других механизмах циклоидальное зацепление было вытеснено эвольвентным, предложенным математиком, швейцарцем по происхождению, Леонардом Эйлером в 1750 году. Это на сто лет позже Дезарга.

## 2.2 Эвольвентное зацепление

### 2.2.1 Принцип образования зацепления

По произвольным окружностям, вращающимся вокруг своих центров  $A$  и  $B$ , катится без скольжения прямая  $CD$  (рис. 2.3).

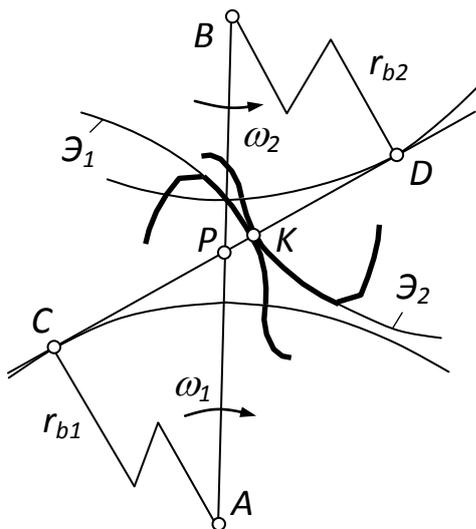


Рис. 2.3

В произвольном месте прямой размещена рисующая точка  $K$ . След точки на плоскости каждого из колёс образует кривые  $\mathcal{Э}_1$ ,  $\mathcal{Э}_2$ , которые называются эвольвентами, по ним и очерчивают зубья. Участки зубьев, расположенные внутри окружностей обката, нарисованы пока произвольно. Эвольвентное зацепление можно представить также как след точки, которая принадлежит нити, перематывающейся с одной окружности на другую.

Как и в циклоидальном зацеплении, рисующая точка оказывается одновременно и точкой касания

нарисованных кривых. В отличие от циклоидального зацепления, у эвольвентного траектория точки касания или, иначе, линия зацепления – прямая. Эта прямая оказывается также контактной нормалью. Нормаль пересекает линию центров в полюсе  $P$ . В любой фазе зацепления полюс занимает неизменное положение на линии центров и, следовательно, передаточное отношение постоянно.

Физически передаточное отношение задают окружности, по которым катится прямая  $CD$ . Эти окружности называют *основными*. Из качения прямой без скольжения следует равенство  $\omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2}$ . Отсюда передаточное отношение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_{b1}}{r_{b2}}. \quad (2.4)$$

Радиусы  $r_{b1}$ ,  $r_{b2}$  основных окружностей конкретного зацепления постоянны, поэтому передаточное отношение тоже постоянно, причём, не только в любой фазе зацепления, но и при любом межцентровом расстоянии. *Независимостью передаточного отношения от колебаний межцентрового расстояния обладает только эвольвентное зацепление.* Это свойство очень важно для практики, т. к. невозможно сделать что-либо абсолютно точно и сохранить эту точность в эксплуатации.

Эвольвентное зацепление является господствующим, поэтому изучим его подробно.

### 2.2.2 Эвольвента, её свойства и уравнения

**Построение эвольвенты.** Из принципа образования эвольвентного зацепления следует, что *эвольвента – это кривая, которую описывает точка прямой линии, перекатывающейся по окружности без скольжения.* Исходя из «ниточной» модели зацепления, эвольвента может быть определена также как кривая, которую описывает конец натянутой нити, разматываемой с окружности. Отсюда *эвольвенту называют развёрткой окружности.*

Из первого определения эвольвенты вытекает следующий способ её приближённого построения. К окружности произвольного радиуса  $r_b$  проводят несколько касательных, изображающих перекатываемую прямую в разные моменты времени (рис. 2.4).

Полагая, что качение происходит по часовой стрелке, нумеруют точки касания в последовательности  $C_1, C_2$  и т. д. В произвольном месте перекатываемой прямой отмечают точку  $B$  и указывают её

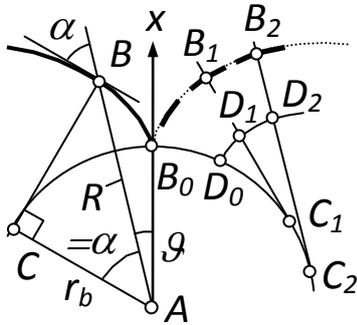


Рис. 2.4

первое положение  $B_1$ . Покатывая прямую в окрестности точки  $C_1$ , получают первую элементарную дугу эвольвенты. Эту дугу заменяют дугой окружности радиуса  $C_1B_1$ . Перекатив прямую в точку  $C_2$ , аналогично получают следующую дугу. Её радиус  $C_2B_2$  выбирают так, чтобы данная дуга выходила из конца предыдущей. Так шаг за шагом может быть построена эвольвента любой требуемой протяжённости.

Элементы и свойства эвольвенты. Продолжая построения неограниченно, обнаруживают, что эвольвента имеет две бесконечные ветви, симметричные относительно прямой  $AB_0$ . В окрестности  $B_0$  точка  $B$  перекатываемой прямой меняет свою скорость на обратную, поэтому  $B_0$  называется *точкой возврата* эвольвенты.

Другие элементы.  $C_i$  – центр кривизны эвольвенты в точке  $B_i$ ,  $C_iB_i$  – радиус кривизны в этой же точке; прямая, проходящая через  $C_i, B_i$ , есть нормаль к эвольвенте в точке  $B_i$ .

Любая другая точка, отмеченная на перекатываемой прямой, например точка  $D$ , образует эвольвенту, идентичную предыдущей. Это значит, что при повороте вокруг точки  $A$  эвольвента, произведённая точкой  $D$ , совмещается с эвольвентой точки  $B$ . Из построений вытекают следующие свойства эвольвенты:

- 1) нормаль к эвольвенте касается основной окружности;
- 2) радиус кривизны эвольвенты равен дуге основной окружности, расположенной под этим радиусом:  $B_1C_1 = B_0C_1, B_2C_2 = B_0C_2$ .
- 3) между эвольвентами расстояние  $B_iD_i = B_0D_0 = \text{const}$ .

Уравнения эвольвенты. Их выводят сначала в полярных координатах  $\vartheta, R$ . Полярный угол  $\vartheta$  отсчитывают от оси  $x$ , проходящей через точку возврата  $B_0$ . Уравнения координат можно получить только в параметрической форме. Параметром, через который

выражают координаты, является угол профиля  $\alpha$ , заключённый между касательной к эвольвенте и полярным радиусом.

В прямоугольном треугольнике  $ABC$ , где  $C$  есть центр кривизны эвольвенты в точке  $B$ , угол при точке  $A$  равен  $\alpha$ . С учётом этого угол  $\vartheta = \angle B_0AC - \alpha$ . Поскольку  $\angle B_0AC = \frac{B_0C}{AC} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$ , то

$$\boxed{\vartheta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha}. \quad (2.5)$$

Полярный радиус выводят из треугольника  $ABC$ , где

$$\boxed{R = \frac{r_b}{\cos \alpha}}. \quad (2.6)$$

На этом вывод уравнений закончен. В помощь расчётчикам созданы таблицы функции (2.5). Она называется эвольвентной и записывается в виде  $\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$ . Читается как инволюта  $\alpha$ .

Независимо от формы профилей зубьев, зацепление может быть как колёсным, состоящим из двух колёс, так и реечным, состоящим из колеса и рейки. Рассмотрим то и другое подробно.

### 2.2.3 Колёсное зацепление

**Линия зацепления.** Теоретически траектория точки касания  $K$  двух эвольвент бесконечна в обе стороны (рис. 2.5).

Однако, выйдя например за точку  $D$ , точка касания переходит на несуществующую, теоретическую ветвь  $\mathcal{E}_2''$  эвольвенты  $\mathcal{E}_2$ . С существующей ветвью  $\mathcal{E}_2'$  происходит пересечение или, иначе, *интерференция*. Вращая колёса в обратном направлении, находят, что аналогичное пересечение происходит и при выходе эвольвент за точку  $C$ . Реальные зубья не могут пересекаться. Поэтому линией зацепления считается только отрезок  $CD$ . Угол  $\alpha_w$  наклона линии зацепления называют *углом зацепления*.

**Активная линия зацепления.** Реальные эвольвенты ограничены по высоте окружностями вершин зубьев и поэтому взаимодействуют лишь на ограниченной части линии зацепления.

Чтобы найти границы этой части, необходимо проследить за движением точки контакта  $K$ . При вращении колёс в сторону  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  точка касания зубьев перемещается по линии зацепления в направлении от  $C$  к  $D$ . По достижении точки  $F$  точка касания ока-

зывается на вершине зуба нижнего колеса. При дальнейшем вращении колёс с прежними скоростями точка касания переходит на несуществующее эвольвентное продолжение профиля зуба, и, следовательно, зубья выходят из зацепления. Таким образом,  $F$  – это точка выхода зубьев из зацепления.

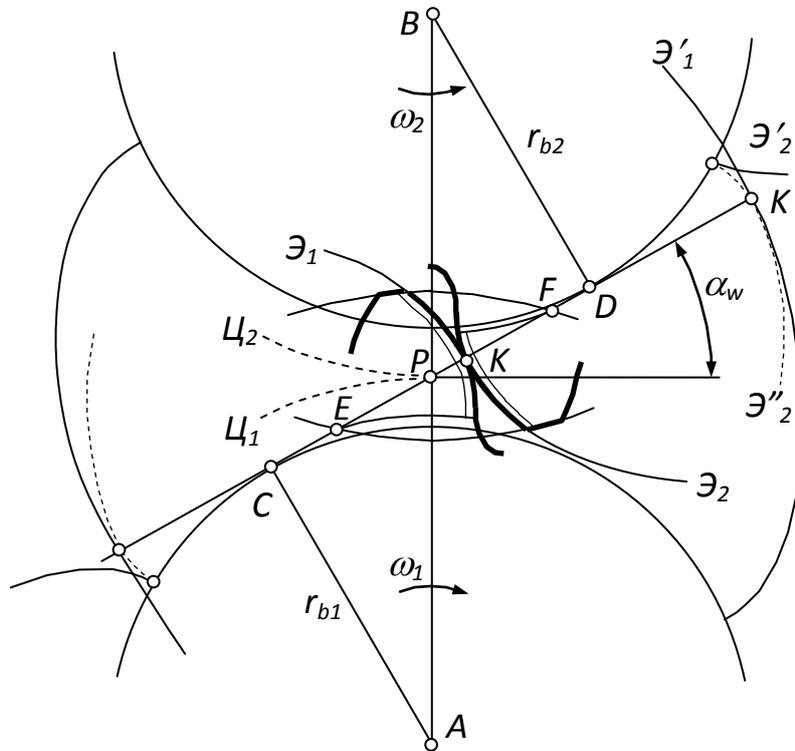


Рис. 2.5

В такой же роли оказывается и точка  $E$  при вращении колёс в обратную сторону. При существующем направлении вращения точка  $E$  является точкой входа зубьев в зацепление. Отрезок  $EF$ , на котором происходит зацепление реальных ограниченных по высоте зубьев, называется *активной линией зацепления*. Чтобы не было интерференции, отрезок  $EF$  должен находиться внутри  $CD$ , поэтому  $CD$  – это также линия допустимого зацепления.

**Активные профили зубьев.** Как отмечено выше, зубья входят в зацепление в точке  $E$ . По отношению к зубу нижнего колеса эта точка находится вблизи его основания. При дальнейшем движении точка касания перемещается к вершине зуба. Ниже  $E$  точка касания никогда не бывает, следовательно, верхняя часть профиля является рабочей, нижняя – не рабочей. Рабочую часть называют *активным профилем зуба*.

Дугой окружности радиуса  $AE$  нижнюю границу активного профиля переносят на текущее положение зуба. Аналогично, дугой окружности радиуса  $BF$  отсекают активный профиль зуба колеса 2. На рисунке активный профиль каждого зуба выделен узкой полоской, идущей вдоль профиля.

### 2.2.4 Реечное зацепление

**Образование зацепления.** Реечное зацепление можно получить как результат преобразования колёсного зацепления. При преобразовании радиус основной окружности одного из колёс, например радиус  $r_{b2}$ , увеличивают до  $r'_{b2}$ , оставив неизменными угол зацепления  $\alpha_w$  и положение линии центров (рис. 2.6).

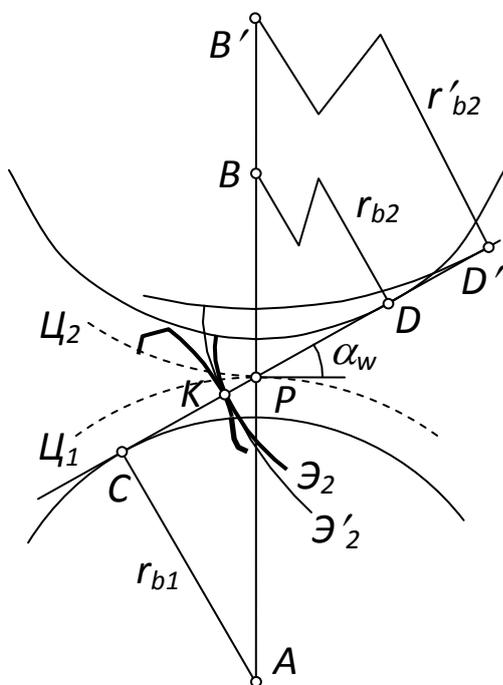


Рис. 2.6

При этом центр колеса 2 перемещается в точку  $B'$ ; центр кривизны эвольвенты  $\mathcal{E}_2$  в точке  $K$  перемещается в точку  $D'$ . Радиус кривизны эвольвенты  $\mathcal{E}_2$  в точке  $K$  возрастает до  $D'K$ . Эвольвента  $\mathcal{E}_2$  превращается в более спрямлённую эвольвенту  $\mathcal{E}'_2$ .

Увеличение радиуса  $r_{b2}$  до бесконечности влечёт за собой следующие изменения. Точки  $B$  и  $D$  устремляются в бесконечность по направлениям  $AB$  и  $CD$  соответственно. Эвольвента  $\mathcal{E}_2$  вырождается в прямую, перпендикулярную линии зацепления  $CD$ . Все окружности превращаются в прямые, перпендикулярные линии центров  $AB$ .

Колесо 2 превращается в прямобочную зубчатую рейку, и зацепление становится реечным (рис. 2.7).

**Элементы и свойства реечного зацепления.** Прямобочная рейка получилась как предел, к которому стремится эвольвентное колесо при бесконечном увеличении радиуса основной окружности. Можно предположить поэтому, что какие-то свойства колёсного зацепления присущи и реечному. Действительно, линия зацепления остаётся прямой, но ограничивается только со стороны

точки  $C$ : в сторону точки  $D$  интерференция зацеплению не угрожает. Активная линия зацепления  $EF$  по-прежнему ограничивается линиями вершин зубьев. Угол зацепления  $\alpha_w$  становится равным углу профиля рейки  $\alpha$  и, следовательно, не зависит от расстояния между колесом и рейкой.

Как в колёсном, так и в реечном зацеплении контактная нормаль совпадает с линией зацепления. Неизменность положения линии зацепления колеса с рейкой означает, что расстояние  $AP$  остаётся постоянным в любой фазе зацепления и при любом расстоянии между колесом и рейкой. Из равенства скоростей колеса и рейки в полюсе зацепления  $P$  следует, что передаточное отношение  $\frac{v}{\omega} = AP = r_{ц}$ .

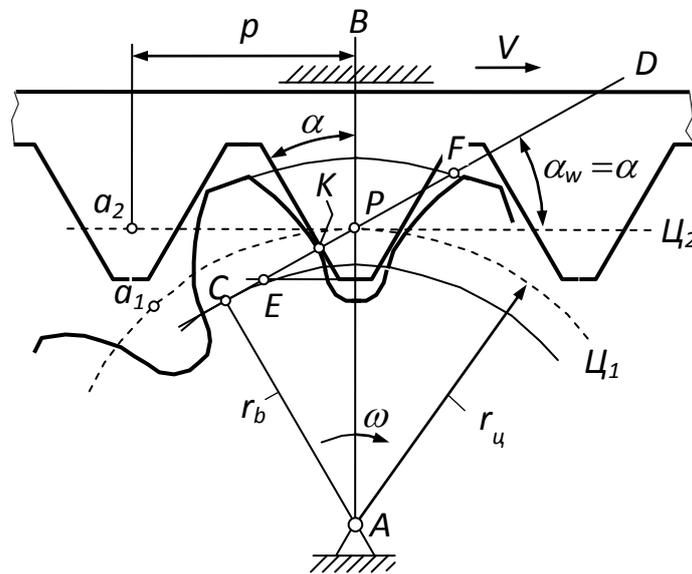


Рис. 2.7

Но как выражается это передаточное отношение через число зубьев  $z$  колеса и параметры рейки? Чтобы середина  $a_2$  зуба рейки попала точно в середину  $a_1$  впадины колеса, шаг колеса  $Pa_1$  по центроиде  $Ц_1$  должен быть равен шагу рейки  $p$  (на рисунке середина зуба рейки совпадает с полюсом  $P$ ). Пусть это так, т. е.  $Pa_1 = p$ . Тогда центроида  $Ц_1$ , заполненная дугами  $Pa_1$ , будет иметь длину  $l = Pa_1 \cdot z = pz$ . В то же время,  $l = 2\pi r_{ц}$ . Приравнивая правые части, получают:  $pz = 2\pi r_{ц}$ . Отсюда

$$r_{ц} = \frac{pz}{2\pi}. \quad (2.7)$$

Выше было отмечено, что  $r_{ц} = \frac{v}{\omega}$ . С учётом этого передаточное отношение  $\frac{v}{\omega} = \frac{pz}{2\pi}$ .

## 2.3 Профилирование зубьев

### 2.3.1 Способ Оливье

С кинематической точки зрения все способы изготовления зубьев могут быть отнесены либо к методу копирования, либо к методу обката. При образовании профилей по методу копирования производимые профили представляют собой отпечаток, копию производящих профилей. Эту копию можно получить литъём, штамповкой, строганием, фрезерованием и другими технологическими способами. Недостаток метода копирования состоит в том, что каждому колесу, отличающемуся по числу зубьев хотя бы на единицу, нужен свой инструмент.

В 1842 г. – это примерно на сто лет позже Эйлера – французский геометр Теодор Оливье показал, что одной и той же производящей кривой или, иначе, производящим контуром  $ПК$ , перекатываемым вместе с центроидой  $Ц_3$  по центроидам  $Ц_1, Ц_2$  производимого зацепления, можно образовать это зацепление с любым наперёд заданным числом зубьев  $z_1, z_2$  (рис. 2.8). Радиусы центроид  $Ц_1, Ц_2$  при этом придётся определять по формуле (2.7).

Метод, при котором производимое колесо является отпечатком производящего контура, перекатывающегося своей центроидой по центроиде производимого колеса, называется *методом обката*. При обкате профиль зуба производимого колеса оказывается не копией, а огибающей мгновенных положений профиля зуба производящего контура. Отсюда метод обката называется также *методом огибания*.

При произвольном производящем контуре режущему или давящему инструменту соответствуют две *производящие рейки*  $ПР_1, ПР_2$ , вписывающиеся в производящий контур с двух сторон.  $ПР_1$  производит колесо 1,  $ПР_2$  – колесо 2. Чтобы обойтись одной производящей рейкой, производящий контур делают симметричным, причём так, что при переворачивании одной из реек их контуры совпадают. *Ось симметрии производящего контура называют делительной прямой (ДП)*. На рисунке делительная прямая совпадает с центроидой  $Ц_3$ , но это не обязательно. Центроида  $Ц_3$  принадлежит столу, несущему производящий контур.

Зацепление производимого колеса с производящим контуром называется *станочным*. Зацепление произведённых колёс друг с

другом называется *рабочим*. На рис. 2.8 рабочим является зацепление 1, 2, станочными – зацепления 1, 3 и 2, 3.

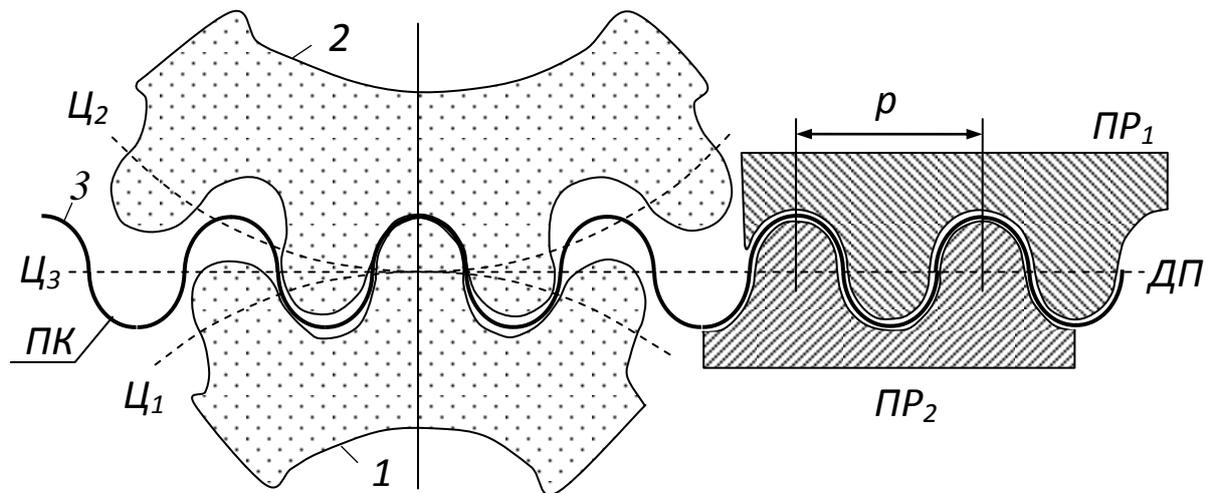


Рис. 2.8

Теперь, когда рассмотрены свойства реечного зацепления (см. рис. 2.7), должно быть ясно, что для образования эвольвентного зацепления двух колёс производящий контур должен иметь прямолинейные профили зубьев.

### 2.3.2 Коррекция эвольвентного зацепления

Обычно колёса, составляющие зацепление, имеют разные числа зубьев. Различными оказываются и сами зубья. Ножка зуба малого колеса получается тоньше, чем большого. Чтобы подравнять зубья и сделать их равнопрочными, производящий контур устанавливают с небольшим смещением к центру большего колеса. В результате зубья малого колеса становятся чуть толще, зубья большого – тоньше, что и требуется для равнопрочности. Построим эвольвентное зацепление без коррекции и с коррекцией.

Исходное некорригированное зацепление образуется производящим контуром 3, расположенным так, что его делительная прямая ДП совпадает с центроидой Ц<sub>3</sub>. Такое положение производящего контура называется *номинальным* или *нулевым* (рис. 2.9, а).

Согласно основной теореме зацепления, контактная нормаль к профилям должна проходить через полюс зацепления  $P$ , расположенный, как известно, в точке касания центроид. Справедливо и обратное: нормаль к профилям, проведённая из полюса, указывает положение точки их контакта. На этом основании из полюса опускают перпендикуляр на производящий профиль и на пересе-

чении с ним получают точку касания  $K$ . Производимые профили, расположенные по обе стороны производящего, являются эвольвентами. По свойству эвольвенты нормаль  $PK$ , продолженная в обе стороны, должна касаться обеих основных окружностей. Опуская из центров  $A, B$  по перпендикуляру на нормаль, находят радиусы  $r_{b1}, r_{b2}$  этих окружностей. От основных окружностей строят эвольвенты, соприкасающиеся в точке  $K$ .

Диаметр заготовки зубчатого колеса выбирают так, чтобы между впадинами одного колеса и вершинами зубьев другого оставался небольшой радиальный зазор  $c$ , одинаковый сверху и снизу.

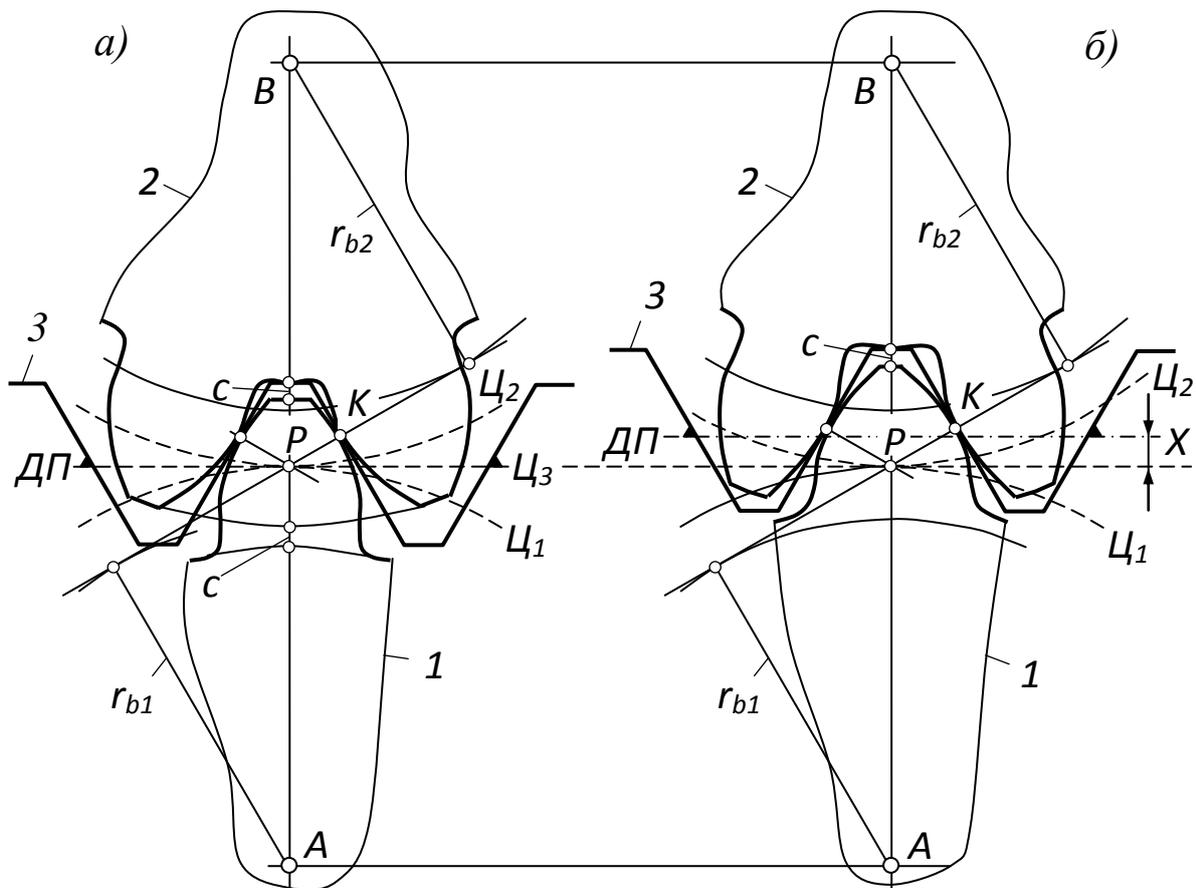


Рис. 2.9

Сместим производящий контур на некоторое расстояние  $X$  снизу – вверх (рис. 2.9, б). По отношению к колесу 1 это будет смещение  $X_1$  в направлении от центра колеса, а по отношению к колесу 2 – смещение  $X_2$ , направленное к центру. Смещение в направлении от центра считается положительным, т. к. увеличивает радиальные размеры колеса. Соответственно, смещение к центру считается отрицательным. Таким образом,  $X_i$  – величина алгебраическая.

Достраивая зацепление до конца, находят (теми же методами), что по центроидам  $\zeta_1, \zeta_2$  зубья нижнего колеса стали толще, а зубья верхнего тоньше. Изменились и радиальные размеры колёс, но, несмотря на это, *числа зубьев колёс остаются прежними*. Это объясняется тем, что центроиды  $\zeta_1, \zeta_2$  не изменились и, следовательно, шаг производящего контура отпечатается на них прежние число раз.

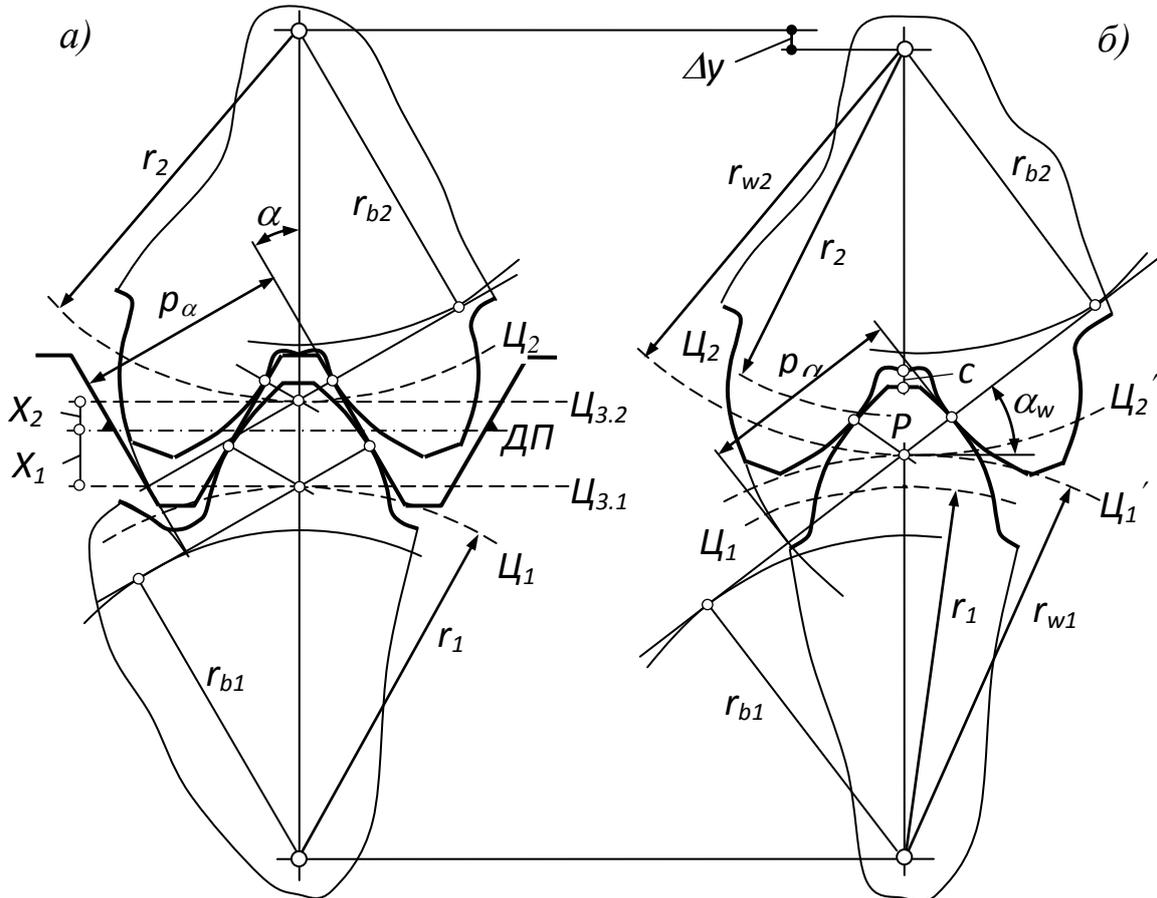


Рис. 2.10

Эвольвентное зацепление, и только эвольвентное, допускает изготовление колёс также с независимыми смещениями  $X_1, X_2$ , например, обоими положительными (рис. 2.10, а).

Производящий контур на этом рисунке катится по центроидам  $\zeta_1, \zeta_2$  центроидами  $\zeta_{3.1}, \zeta_{3.2}$ . Центроиды  $\zeta_1, \zeta_2$  остаются прежними. Точка касания каждой пары центроид —  $\zeta_1, \zeta_{3.1}$  и  $\zeta_2, \zeta_{3.2}$  — является полюсом соответствующего станочного зацепления. Опуская из каждого полюса перпендикуляры на профили зубьев производящего контура, получают точки его касания с производимыми профилями. Производимые профили являются эвольвентами всё тех же основных окружностей радиусов  $r_{b1}, r_{b2}$ .

Как видно по рис. 2.10, *а*, в результате смещений  $X_1, X_2$  эвольвенты раздвинулись и производимые зубья стали толще. Между зубьями появился боковой зазор. Удалив из картины зацепления производящий контур и сблизив колёса до упора друг в друга, получают корригированное зацепление (рис. 2.10, *б*).

Но подойдут ли колёса друг другу после всех изменений? Необходимым условием правильного взаимодействия профилей зубьев одного колеса с профилями другого является равенство  $p_{n1} = p_{n2}$  шагов по нормали к этим профилям (рис. 2.11, *а*, *б*).

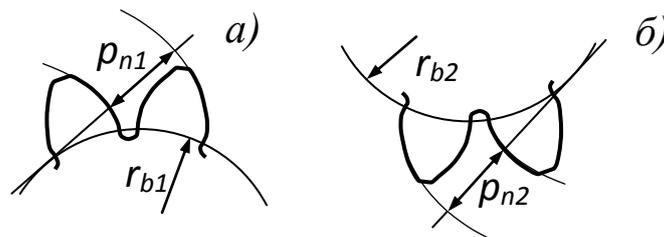


Рис. 2.11

Как видно по рис. 2.9, эти шаги равны шагу  $p_\alpha$  производящего контура, следовательно, при любых смещениях  $X_1, X_2$  условие правильного взаимодействия профилей зубьев удовлетворяется.

Несмотря на сближение  $\Delta u$  (см. рис. 2.10, *б*), межцентровое расстояние остаётся больше, чем на рис. 2.9. Возросшее межцентровое расстояние влечёт за собой два последствия.

Первое. Линия зацепления, оставаясь касательной к основным окружностям, располагается под углом  $\alpha_w$  (углом зацепления), не равным углу профиля  $\alpha$  производящего контура.

Второе. Полус рабочего зацепления  $P$ , лежащий на пересечении линии зацепления с линией центров, располагается между станочными центроидами  $C_1, C_2$ , и зацепление обретает новые центроиды  $C_1', C_2'$ , касающиеся друг друга в этом полюсе.

Это – центроиды рабочего зацепления, их называют *начальными* окружностями. Старые центроиды  $C_1, C_2$  – центроиды станочных зацеплений – называют *делительными* окружностями. На рис. 2.9 делительные и начальные окружности совпадают.

Радиусы начальных окружностей имеют индекс  $w$  с соответствующим номером. Радиусы делительных окружностей не имеют буквенного индекса.

Обсуждаемое зацепление равносильно образованному производящим контуром с углом профиля  $\alpha = \alpha_w$ , поэтому коррекция называется угловой.

В зависимости от вида коррекции или её отсутствия зацепления имеют специальные названия. Некорригированное зацепление называется *нулевым*. При высотной коррекции смещения равны по величине и противоположны по знаку. Ввиду равенства смещений по величине, зацепление называют *равносмещённым*.

При угловой коррекции смещения могут быть любыми по величине и по знаку, лишь бы их сумма не была равна нулю –  $X_\Sigma = X_1 + X_2 \neq 0$ . В противоположность равносмещённому, зацепление с угловой коррекцией называется *неравносмещённым*.

Как видно по рис. 2.9, нулевое и равносмещённое зацепления имеют ряд общих свойств. У них  $X_\Sigma = 0$ , угол зацепления  $\alpha_w$  равен углу профиля  $\alpha$  производящего контура, делительные и начальные окружности совпадают.

### 2.3.3 Параметры стандартного производящего контура

Существует реальный производящий контур, принадлежащий физическому инструменту со всеми его отклонениями от правильной формы, и идеально точный, теоретический, называемый исходным производящим. В рамках теории механизмов не приходится говорить о реальном контуре, поэтому определение «исходный» опускается.

До сих пор производящий контур изображался на всех рисунках упрощённо – в виде регулярной ломаной линии. На самом деле контур отличается небольшими скруглениями по углам (рис. 2.12).

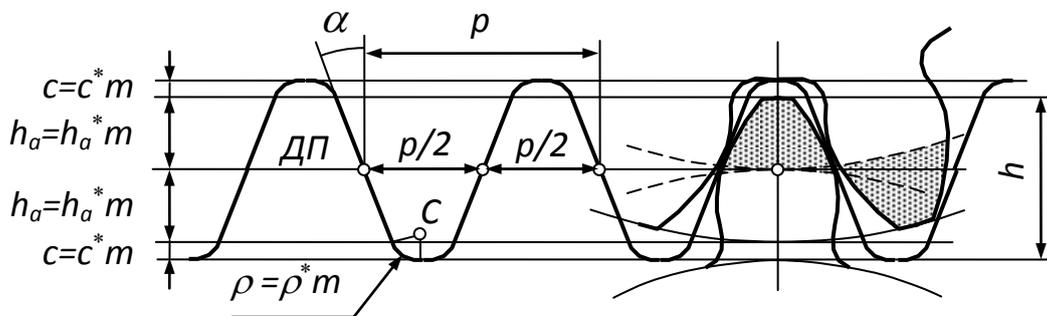


Рис. 2.12

Основным параметром производящего контура является его шаг  $p$ . Если шаг выбирать из существующего в машиностроении стан-

дартного ряда предпочтительных чисел, а там числа рациональные и, прежде всего целые, то радиусы делительных окружностей всех колёс будут выражаться иррациональными числами.

**Доказательство.** Делительная окружность – это центроида колеса в зацеплении с производящей рейкой, поэтому её радиус определяет формула (2.7) реечного зацепления. После замены обозначения  $r_{ц}$  на  $r$ , принятое для делительной окружности, её радиус

$$r = \frac{pz}{2\pi}. \quad (2.8)$$

Если  $p$  – число рациональное, то из-за  $\pi$  радиус  $r$  – число иррациональное. Чтобы избежать иррациональности, шаг представили в виде

$$\boxed{p = \pi m}, \quad (2.9)$$

где  $m$  – целое или дробное рациональное число, выражаемое в миллиметрах и называемое *модулем*. После подстановки формулы (2.9) в (2.8) радиус делительной окружности

$$\boxed{r = \frac{mz}{2}}. \quad (2.10)$$

*Модуль*, по-гречески, – мера, единица измерения. Роль меры число  $m$  оправдывает уже в формуле (2.9), где шаг составляет  $\pi$  модулей.

Шаг производящего контура копируется на делительную окружность производимого колеса, копируется и его  $\pi$ -я часть. На этом основании говорят, что колесо имеет такой же модуль, как производящий контур.

**Прочие параметры производящего контура.** Чтобы обеспечить геометрическое подобие или, иначе, одинаковые пропорции производящих контуров разных абсолютных размеров, через модуль выражают не только шаг, но и другие линейные параметры контура. В нулевом и равносмещённом зацеплении – на рисунке оно вписано в производящий контур справа – высота головки зуба (выделена серым) у обоих колёс получается равной  $h_a$ , поэтому  $h_a^*$  называют коэффициентом высоты головки зуба. По стандарту  $h_a^* = 1$ . Размер  $s$  – это высота скруглённой части контура и радиальный зазор в зацеплении. По стандарту коэффициент радиального зазора  $s^* = 0,25$ . Коэффициент радиуса скругления  $\rho^* = 0,38$ . Скругления не образуют непрерывную окружность, их разделяет короткий прямолинейный участок шириной примерно 0,03 высоты скругления. Единственный нелинейный параметр производящего контура – угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ .

## 2.4 Параметры колеса и зацепления

### 2.4.1 Станочное зацепление

Зацепление изображено на рис. 2.13. Производящая рейка в нём

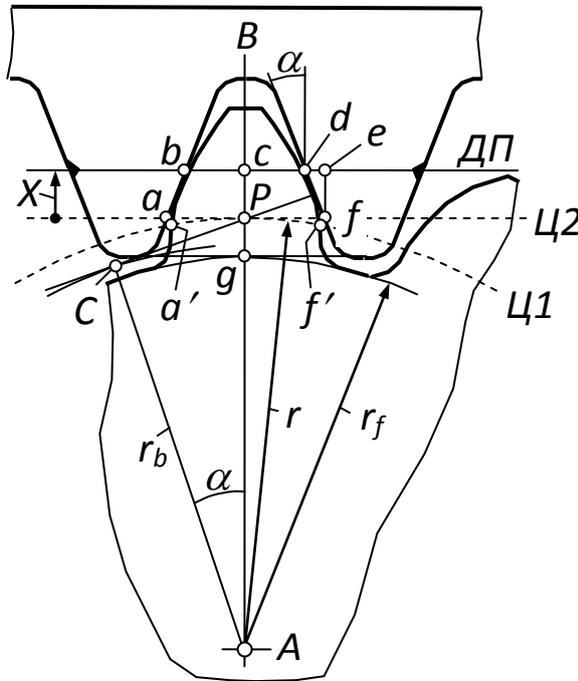


Рис. 2.13

установлена со смещением  $X$ . Это смещение представляют в виде  $X = xt$ , где  $x$  – коэффициент смещения, а  $t$  – модуль. Коэффициент смещения, как и само смещение, имеет знак.  $X$  – это абсолютное смещение,  $x$  – относительное или смещение в долях модуля. Соответственно смещению рейки произведённые колёса называются *положительными*, *отрицательными* или *нулевыми*.

Из станочного зацепления можно вывести все параметры, кроме радиуса окружности вершин.

Радиус  $r_b$  основной окружности. Из  $\triangle ACP$  следует:

$$\boxed{r_b = r \cos \alpha}. \quad (2.11)$$

Радиус  $r_f$  окружности впадин. Судя по рисунку,  $r_f = AP + Pc - cg = r + xt - (h_a^* + c^*)t$ . После преобразования

$$\boxed{r_f = r + (x - h_a^* - c^*)t}. \quad (2.12)$$

Толщина  $s$  зуба по делительной окружности.  $s = a'f' = af = bd + 2de = \frac{\pi t}{2} + 2xt \operatorname{tg} \alpha$ . Окончательно,

$$\boxed{s = \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha t}. \quad (2.13)$$

Минимальное число зубьев из условия неподрезания. Подрез – это выемка на ножке зуба, появляющаяся вследствие интерференции в станочном зацеплении. *Интерференция*, как известно, возникает тогда, когда активная линия зацепления зубчатых звеньев выходит за какую-либо границу всей линии зацепления.

Пусть одной и той же производящей рейкой, установленной без смещения, производятся три колеса с разными числами зубьев, причём  $z_1 > z_2 > z_3$  (рис. 2.14).

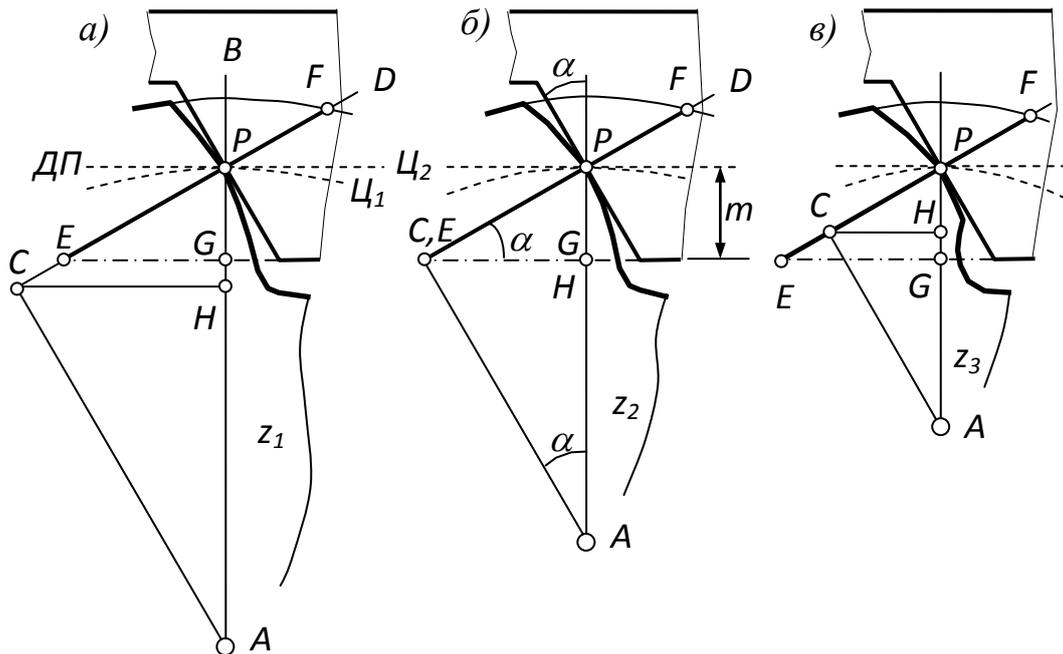


Рис. 2.14

На всех трёх видах приняты следующие обозначения:  $CD$  – вся линия зацепления (точка  $D$  находится в бесконечности),  $EF$  – активная линия зацепления. Точка  $E$  определена без учёта скруглённой части зуба рейки, т. к. эта часть в образовании эвольвенты не участвует и, следовательно, её не подрезает.

В случае, показанном на виде  $a$ , подрез колесу не угрожает, т. к. активная линия зацепления не выходит за границу  $C$  всей линии зацепления. В случае  $b$  границы  $C, E$  линий зацепления совпадают, и колесо находится на грани подреза. В случае  $v$  активная линия зацепления вышла за границу всей линии зацепления, и ножка зуба будет подрезана. Подрезом считается только такая выемка в осно-

вании зуба, которая захватывает эвольвенту. Поэтому не всякое видимое поднутрение в основании зуба считается подрезом.

Число зубьев колеса на виде  $b$  обозначают через  $z_{\min}$ . Это число наименьшее из условия неподрезания, выведем его формулу. Из рисунка следует:  $PH = PC \cdot \sin \alpha$ ;  $PC = AP \cdot \sin \alpha$ . После подстановки получают:  $PH = AP \cdot \sin^2 \alpha$ . Выражая отрезки через модуль, находят, что  $m = \frac{mz_{\min}}{2} \sin^2 \alpha$ . Отсюда

$$\boxed{z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}}. \quad (2.14)$$

При  $\alpha = 20^\circ$   $z_{\min} \cong 17$ .

Минимальный коэффициент смещения из условия неподрезания. В случае  $b$  колесо получается с подрезом. Чтобы его устранить, необходимо сдвинуть рейку от центра колеса как минимум на  $GH$ . При этом точка  $E$  совпадёт с  $C$  и возникнет ситуация, показанная на виде  $b$ . Таким образом,  $GH$  – это минимальное смещение, необходимое для устранения подреза.

$GH = PG - PH$ . Смещение  $GH$  представляют в виде  $x_{\min} m$ , где  $x_{\min}$  – коэффициент минимального смещения;  $PG = m$ . Из предыдущего известно, что  $PH = AP \cdot \sin^2 \alpha = \frac{mz_3}{2} \sin^2 \alpha$ . Возвращаясь в формулу для  $GH$  и удаляя индекс при  $z_3$ , получают:  $x_{\min} m = m - \frac{mz}{2} \sin^2 \alpha$ . Отсюда  $x_{\min} = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha$ . С учётом формулы (2.14), а также принимая, что  $z_{\min} = 17$ , получают

$$\boxed{x_{\min} = \frac{17-z}{17}}. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) предназначена для колёс с числом зубьев  $z < 17$ . Однако она имеет смысл и для  $z > 17$ . В этом случае  $x_{\min}$  определяет допустимое отрицательное смещение, не угрожающее подрезом. Применительно к рис. 2.14,  $a$  это допустимое смещение равно расстоянию  $GH$  и направлено к центру колеса.

Толщина зуба по произвольной окружности. Все величины, относящиеся к такой окружности, снабжаются индексом  $y$ . Таким образом, требуется определить толщину зуба  $s_y$  на окружности радиуса  $r_y$ .

От основной окружности радиуса  $r_b$  образуем две симметричные эвольвенты, по которым очерчен зуб колеса (рис. 2.15).

Пересечём эвольвенты дугой делительной окружности радиуса  $r$

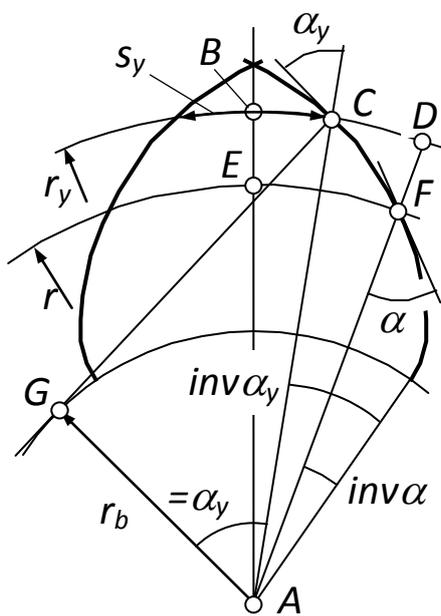


Рис. 2.15

и дугой произвольной окружности радиуса  $r_y$ . Покажем углы профиля  $\alpha$  и  $\alpha_y$ . Из них первый есть угол профиля в точке пересечения с делительной окружностью или, иначе, угол профиля на делительной окружности, другой – угол профиля на произвольной окружности.

Как видно по рис. 2.14, б, угол профиля на делительной окружности равен углу профиля производящей рейки. Таким образом, угол  $\alpha$  на рис. 2.15 есть константа, а  $\alpha_y$  – переменная, зависящая от  $r_y$ . Покажем инволюты углов профиля –

$\text{inv } \alpha$  и  $\text{inv } \alpha_y$ . Из рисунка следует, что  $s_y = 2 BC = 2(BD - CD)$ . В скобках имеем:  $BD = EF \frac{r_y}{r} = \frac{s}{2} \frac{r_y}{r}$ ;  $CD = r_y(\text{inv } \alpha_y - \text{inv } \alpha)$ . После подстановок в исходное уравнение

$$\boxed{s_y = 2r_y \left( \frac{s}{2r} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_y \right)}. \quad (2.16)$$

Угол  $\alpha_y$  выводят из треугольника  $ACG$ :

$$\alpha_y = \arccos \left( \frac{r_b}{r_y} \right) \quad (2.17)$$

### 2.4.2 Рабочее зацепление

Угол зацепления. Пусть в зацеплении находятся два колеса с коэффициентами смещения  $x_1, x_2$  (рис. 2.16).

На начальной окружности любого колеса, например первого, толщина зуба  $s_{w1}$ , ширина впадины  $e_{w1}$  и шаг  $p_{w1}$  связаны уравнением  $s_{w1} + e_{w1} = p_{w1}$ . В плотном, не имеющем бокового зазора, зацеплении, каковым является рассматриваемое,  $e_{w1} = s_{w2}$ . По начальной окружности колеса 1 шаг  $p_{w1} = \frac{2\pi r_{w1}}{z_1}$ . С учётом этого

$$s_{w1} + s_{w2} = \frac{2\pi r_{w1}}{z_1}. \quad (2.18)$$

$$s_{w1} = 2r_{w1} \left( \frac{s_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w \right). \quad (2.19)$$

Формула (2.19) составлена на основании (2.16). Перед записью формулы для  $s_{w2}$  радиусы  $r_{w2}$ ,  $r_2$  выражают через  $r_{w1}$ ,  $r_1$ . Из второго уравнения системы (2.3), а также из формулы (2.10) следует, что обсуждаемые радиусы пропорциональны числам зубьев. На этом основании  $r_{w2} = r_{w1} \frac{z_2}{z_1}$ ,  $r_2 = r_1 \frac{z_2}{z_1}$ . Теперь можно записать:

$$s_{w2} = 2r_{w1} \frac{z_2}{z_1} \left( \frac{s_2}{2r_1} \frac{z_1}{z_2} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w \right). \quad (2.20)$$

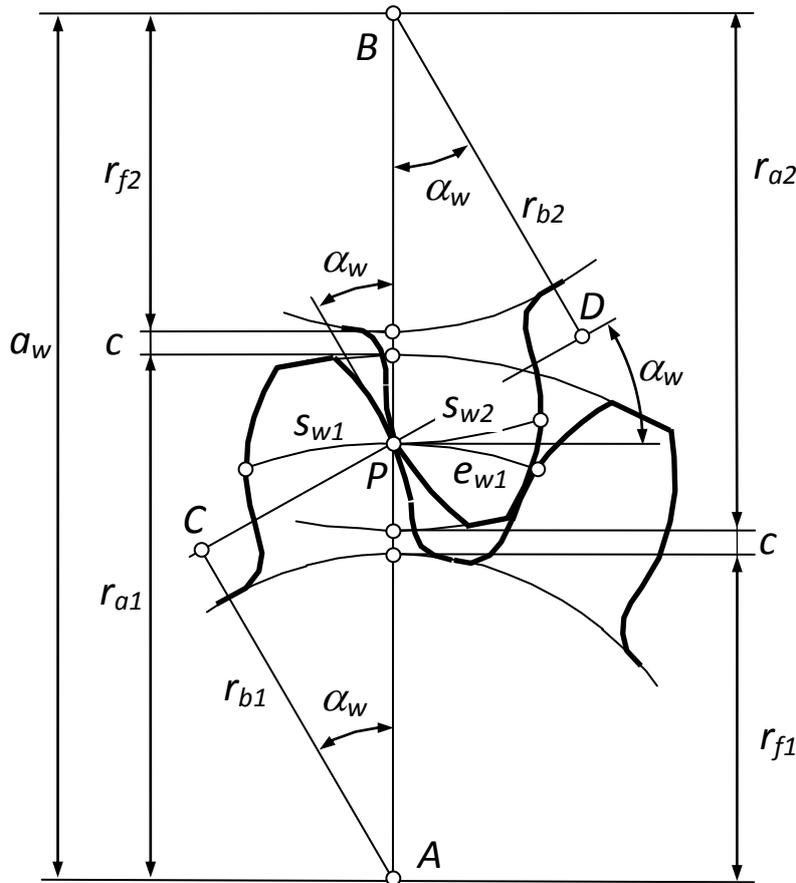


Рис. 2.16

После подстановки выражений (2.19), (2.20) в (2.18) получают:

$$\frac{s_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w + \frac{s_2}{2r_1} + \frac{z_2}{z_1} \text{inv } \alpha - \frac{z_2}{z_1} \text{inv } \alpha_w = \frac{\pi}{z_1}. \quad (2.21)$$

Входящие сюда толщины  $s_1$ ,  $s_2$  и радиус  $r_1$  известны:

$$s_1 = (\pi/2 + 2x_1 \text{tg } \alpha)m; \quad s_2 = (\pi/2 + 2x_2 \text{tg } \alpha)m; \quad r_1 = mz_1/2.$$

После их подстановки в (2.21) выводят инволюту угла зацепления:

$$\boxed{\operatorname{inv} \alpha_w = \frac{2 x_1 + x_2 \operatorname{tg} \alpha}{z_1 + z_2} + \operatorname{inv} \alpha}. \quad (2.22)$$

В полученной формуле  $\alpha$  есть угол профиля производящего контура, (равен  $20^\circ$ ). Угол зацепления  $\alpha_w$  определяют по таблицам эвольвентной функции.

Межцентровое расстояние  $a_w$ . Судя по рис. 2.16,

$$a_w = AP + BP = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} + \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w}.$$

Для любого колеса радиус основной окружности  $r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha$ .

После индексации и подстановок

$$\boxed{a_w = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}}. \quad (2.23)$$

Формулы (2.22), (2.23) позволяют подтвердить отмеченные ранее особенности нулевого, равносмещённого и неравносмещённого зацеплений. У нулевого и равносмещённого зацеплений сумма коэффициентов смещения  $x_1 + x_2 = 0$ . При этом, согласно (2.22),  $\alpha_w = \alpha$ , т. е. угол зацепления равен углу профиля производящего контура. Кроме того, согласно (2.23),  $a_w = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2}$ .

Слагаемые межцентрового расстояния  $a_w$  являются радиусами  $r_1$ ,  $r_2$  делительных окружностей. Сумма показывает, что эти окружности касаются друг друга. Более того, они совпадают с начальными окружностями. Совпадение вытекает из отмеченной выше пропорциональности радиусов этих окружностей числам зубьев.

В неравносмещённом зацеплении  $x_1 + x_2 \neq 0$ . При этом  $\alpha_w \neq \alpha$ ,  $a_w \neq r_1 + r_2$ . В частности, если  $x_1 + x_2 > 0$ , то  $\alpha_w > \alpha$ ,  $a_w > r_1 + r_2$ . И наоборот.

Радиус  $r_{a1}$  окружности вершин зубьев. Непосредственно из рис. 2.16 следует:

$$\boxed{r_{a1} = a_w - r_{f2} - c}. \quad (2.24)$$

В любом зацеплении – нулевом, равносмещённом и неравносмещённом радиальный зазор  $c$  принимают равным высоте  $c^*m$  скруглённой части производящего контура, т. е.  $0,25m$ .

О высоте зуба. Согласно рис. 2.12, в нулевом и равносместенном зацеплениях высота зуба  $h = 2h_a^* + c^* m$  или  $2,25m$ . В неравносместенном зацеплении высота зуба другая. Если предположить, что на рис. 2.10, *a* радиальный зазор равен  $0,25m$ , то высота зуба составит  $2,25m$ , как в нулевом зацеплении. После сближения колёс (рис. 2.10, *б*) радиальный зазор уменьшится. Чтобы привести его к прежнему значению, придётся уменьшить высоту зуба, и она уже не будет равна  $2,25m$ . Отсюда следует важный практический вывод – в общем случае нельзя определять модуль, исходя из высоты зуба  $h = 2,25m$ .

Коэффициент перекрытия. Перекрытием называется такое чередование работы зубьев, при котором каждая следующая пара зубьев входит в зацепление раньше, чем выйдет из него предыдущая.

На рис. 2.17 зубья входят в зацепление в точке *E*, а выходят в точке *F*. Пара зубьев, соприкасающихся в точке *K*, ещё не дошла до конца активной линии зацепления, а следующая уже вошла в зацепление, следовательно, перекрытие есть.

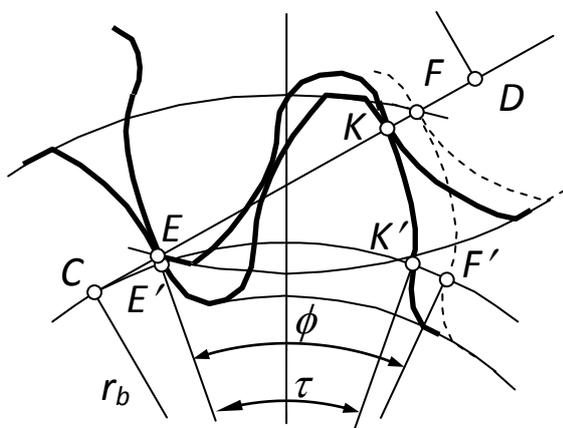


Рис. 2.17

Степень перекрытия оценивают коэффициентом перекрытия

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\varphi}{\tau}}, \quad (2.25)$$

где  $\varphi$  – угол поворота какого-либо из колёс за время зацепления одной пары зубьев;  $\tau$  – угловой шаг колеса,  $\tau = 360^\circ/z$ .

Для эвольвентного зацепления коэффициент перекрытия может быть определён ещё одним способом.

В радианном измерении

$$\varphi = \frac{EF'}{r_b}, \tau = \frac{E'K'}{r_b}. E'F' = EF, E'K' = EK. \text{ После подстановок}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{EF}{EK}}. \quad (2.26)$$

Перекрытие обеспечивается, если  $\varepsilon \geq 1$ , т. е.  $EF \geq EK$ .

Если  $\varepsilon = 1$ , то в зацеплении постоянно находится только одна пара зубьев, если  $\varepsilon = 2$ , то – две, и т. д. Если  $\varepsilon$  заключено между единицей и двойкой, то в зацеплении поочередно находится то одна, то две пары зубьев.

### 2.4.3 Блокирующие контуры

Влияние коэффициентов смещения на параметры зацепления труднообозримо, поэтому в помощь расчётчикам созданы справочные материалы. Эти материалы представляют собой систему графиков, ограничивающих выбор коэффициентов смещения, исходя из геометрической безупречности зубчатой передачи. Графики образуют замкнутую область и поэтому называются блокирующими контурами (рис. 2.18).

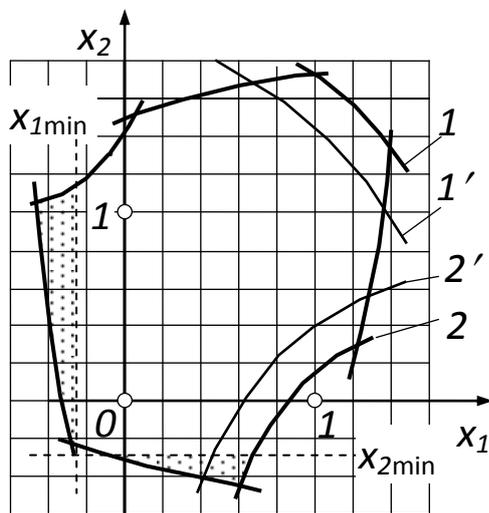


Рис. 2.18

Каждый контур строится для определённого сочетания чисел зубьев  $z_1, z_2$ , а также для определённого производящего контура и определённой системы расчёта радиального зазора в рабочем зацеплении. Осями координат контура являются коэффициенты смещения  $x_1, x_2$ . Коэффициенты смещения должны соответствовать любой точке, заключённой внутри контура или лежащей на его границе. Такой выбор коэффициентов гарантирует следующие качества зацепления:

- отсутствие интерференции в рабочем зацеплении (*незаклинивание*);
- отсутствие интерференции в станочном зацеплении (*неподрезание*);
- толщину зуба при вершине  $s_a \geq 0$  (*незаострение*);
- коэффициент перекрытия  $\varepsilon \geq 1$  (*непрерывность зацепления*).

Выбор коэффициентов смещения на границе контура даёт зацепление, у которого одно из указанных выше качеств оказывается на пределе допустимого. Например, выбор коэффициентов смещения на линии 1 даёт зацепление с коэффициентом перекрытия  $\varepsilon = 1$ . На линии 2 – зацепление с толщиной зуба  $s_{a1} = 0$ . На

практике коэффициенты выбирают так, чтобы иметь некоторый запас качества. Ориентиром при этом служат добавочные линии контура, например  $1'$ ,  $2'$ . Из них первая гарантирует  $\varepsilon = 1,2$ ; вторая обеспечивает толщину  $s_{a1} = 0,25m$ .

Выбор коэффициентов смещения в затенённой зоне, расположенной левее прямой  $x_{1\min}$ , даёт зацепление с подрезом ножки зуба колеса 1. Этот подрез не захватывает активный профиль зуба и поэтому допустим. Аналогичными свойствами обладает зона, лежащая ниже  $x_{2\min}$ . Здесь подрезается ножка зуба колеса 2.

#### 2.4.4 Станочное колёсное зацепление

С помощью производящей рейки невозможно образовать колесо с внутренними зубьями. Это можно сделать только с помощью производящего колеса. В качестве такового может выступать одно из колёс рабочего зацепления, изображённого, например, на рис. 2.10, б.

С помощью производящего колеса можно образовать колесо не только с внутренними, но и с внешними зубьями. Чтобы заполнить впадину производимого колеса на всю глубину, окружность вершин производящего колеса делают больше на величину радиального зазора  $c = c^*m$ .

При образовании колеса колесом (инструментом в виде колеса) станочное зацепление подчинено тем же законам, что и одноимённое рабочее зацепление, однако некоторые термины требуют пояснения. Предположим, что колесо 2 (рис. 2.10, б) является производящим, а колесо 1 – производимым. Тогда центры  $\zeta_1'$ ,  $\zeta_2'$  – это начальные окружности станочного кругового зацепления.

Центры  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  называются по-прежнему делительными окружностями и имеют следующий смысл.  $\zeta_2$  – это центроида производящего колеса в его фактическом зацеплении с производящим реечным контуром (рис. 2.10, а). Из картины этого зацепления определяют форму и размеры производящего колеса.  $\zeta_1$  – центроида колеса 1 в воображаемом зацеплении с исходным производящим реечным контуром. На чертеже колеса всегда указывают коэффициент смещения. Это коэффициент смещения в указанном воображаемом зацеплении.

### 2.4.5 Элементы внутреннего зацепления

Как и во внешнем зацеплении, линия  $CD$  внутреннего зацепления является касательной к основным окружностям радиусов  $r_{b1}$ ,  $r_{b2}$  (рис. 2.19, *a*).

Зацепление проходит без интерференции на участке  $CD$ , где точка  $D$  устремлена в бесконечность, как в реечном зацеплении. Активную линию зацепления определяют точки пересечения  $E$ ,  $F$  линии зацепления с окружностями вершин зубьев. У колеса с внутренними зубьями их вершины обращены к центру колеса.

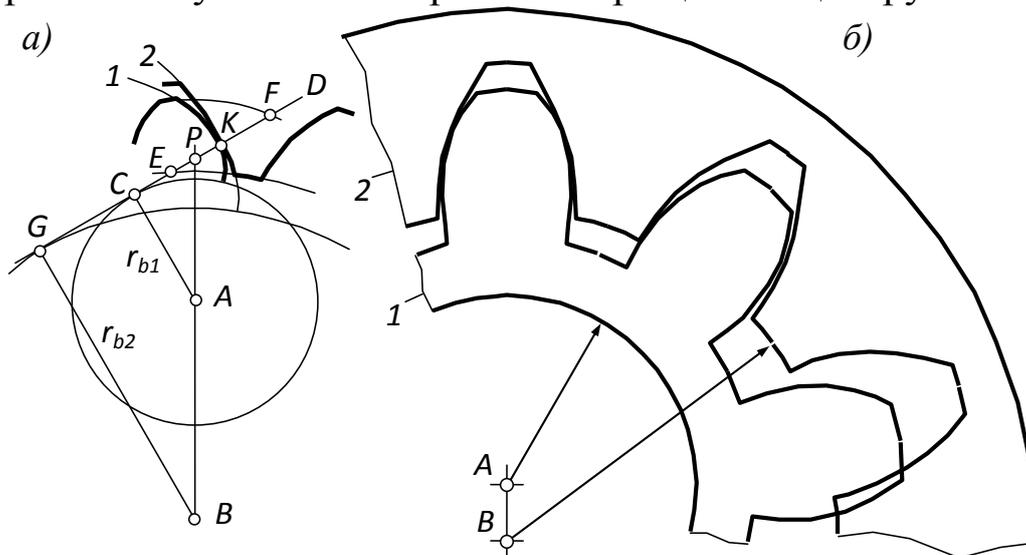


Рис. 2.19

При малой разнице чисел зубьев зацеплению угрожает интерференция второго рода. Она показана на виде *б*. При надлежащем выборе коэффициентов смещения и применении нестандартных исходных контуров указанной интерференции можно избежать, причём, при разнице чисел зубьев даже на единицу.

## 2.5 Цилиндрическое косозубое зацепление

### 2.5.1 Принцип образования зацепления

Пусть с одного цилиндра на другой перематывается гибкая нерастяжимая лента (рис. 2.20, *a*). На ленте проведена прямая  $KK'$  под углом  $\beta_b$  к прямой  $PP'$ , параллельной продольным образующим цилиндров. Из теории плоского зацепления известно, что точка  $K$  описывает в передней торцевой плоскости эвольвенты  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  основных окружностей радиусов  $r_{b1}$ ,  $r_{b2}$ . Такие же эвольвенты опи-



Через полюс зацепления  $P$  проходят начальные окружности, поэтому цилиндры радиусов  $AP$  и  $BP$  называются начальными. Существуют также делительные цилиндры, в нулевом и равносместном зацеплениях они совпадают с начальными цилиндрами.

### 2.5.2 Изготовление зацепления

Зацепление изготавливают преимущественно методом обката. Обкат происходит по поверхностям  $A_1, A_2, A_3$  (рис. 2.21), образованным от центроид  $C_1, C_2, C_3$ , известных по плоскому зацеплению (см. рис. 2.9, а).

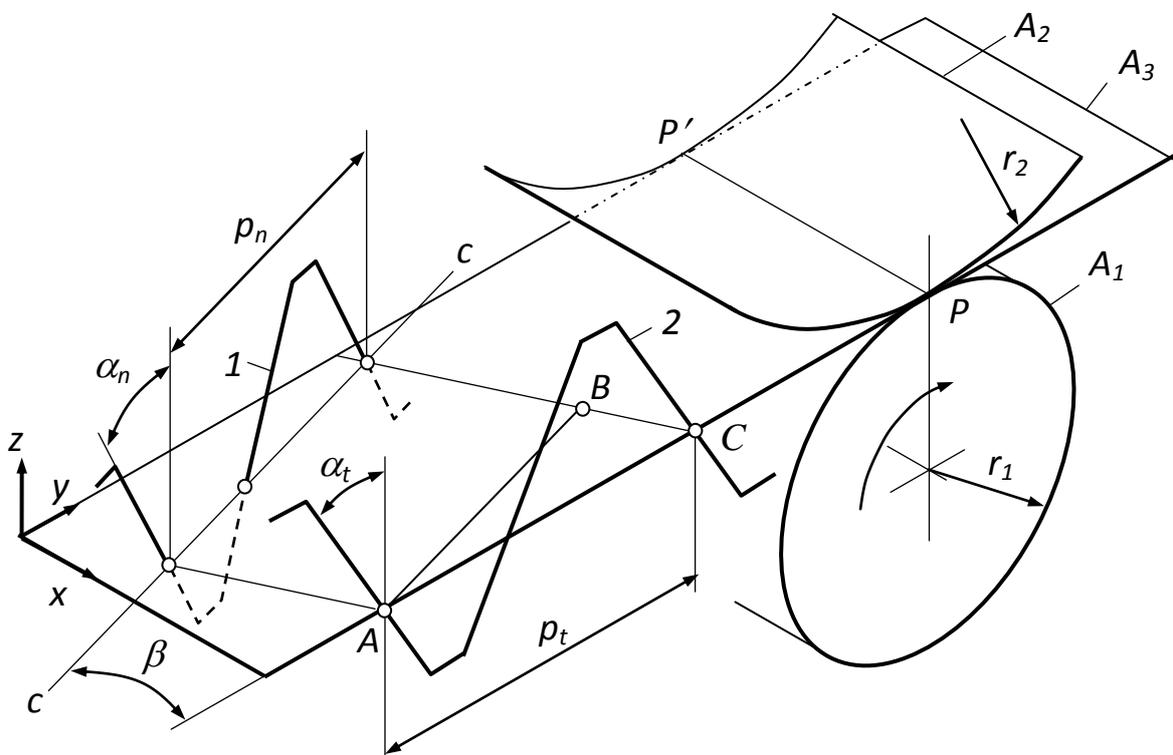


Рис. 2.21

Линия  $PP'$  касания поверхностей обката является мгновенной осью вращения во взаимном движении этих поверхностей, поэтому их называют *аксоидами*.

Косозубое зацепление образуют тем же производящим контуром  $1$ , что и в случае плоского зацепления. Контур совершает два движения – вместе с аксоидом  $A_3$  и относительно этого аксоида. Второе движение контур совершает перпендикулярно самому себе. В результате второго движения в пространстве  $xuz$  аксоида  $A_3$  создаётся гребенчатый след, называемый производящей поверх-

ностью. Двигаясь с аксоидом  $A_3$ , производящая поверхность формирует косозубое зацепление.

Параметры косозубого колеса. При расчёте этих параметров различают два сечения производящей поверхности. Первое – перпендикулярно граням этой поверхности, второе – перпендикулярно оси колеса. Первое сечение совпадает с производящим контуром  $1$  и называется *нормальным*, второе называется *торцевым* и образует производящий контур  $2$ , отличающийся от контура  $1$  шагом и углом профиля. Всем величинам, относящимся к нормальному сечению, присваивают индекс  $n$ , а относящимся к торцевому сечению – индекс  $t$ . Параметры нормального сечения известны по плоскому зацеплению. Найдем параметры торцевого сечения.

В треугольнике  $ABC$  угол при точке  $B$  – прямой, угол при точке  $A$  равен  $\beta$ , сторона  $AB$  есть шаг  $p_n$  в нормальном сечении,  $BC$  – это шаг  $p_t$  в торцевом сечении. Из треугольника следует:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}. \quad (2.27)$$

Поделив  $p_t$  и  $p_n$  на число  $\pi$ , получают так называемый торцевой  $m_t$  и нормальный  $m_n$  модули. Нормальный модуль – это модуль контура  $1$ . Модули связаны соотношением

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}. \quad (2.28)$$

Угол профиля в торцевом сечении находят по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}.$$

С введением торцевого сечения производящей поверхности задачу определения параметров косозубого колеса в его торцевом сечении решают так же, как плоского колеса (см. рис. 2.13).

Так, радиусы окружностей, выводимых из станочного зацепления, определяют теперь по формулам:  $r = \frac{m_t z}{2}$ ;  $r_b = r \cos \alpha_t$ ;  $r_f = r - (h_a^* + c^* - x)m_n$ .

Коэффициент перекрытия косозубой передачи. Рассмотрим плоскость зацепления  $CC'D'D$  и поле зацепления  $EE'F'F$ , определяемое активной линией зацепления  $EF$  (рис. 2.22).

Зубья входят в зацепление в точке  $E$ , а выходят в точке  $F'$ . За это время точки основной окружности проходят путь, равный отрезку  $EF''$ . При прочих равных условиях в прямозубом зацеплении этот путь был бы равен отрезку  $EF$ , что заметно меньше. Коэффициент перекрытия прямозубого и косозубого зацеплений равен отношению отрезков  $EF$ ,  $EF''$  к шагу соответствующего колеса по нормали к профилям зубьев в их торцевых сечениях. Шаги отличаются не столь значительно, как  $EF$  и  $EF''$ , поэтому в косозубом зацеплении коэффициент перекрытия больше, чем в прямозубом.

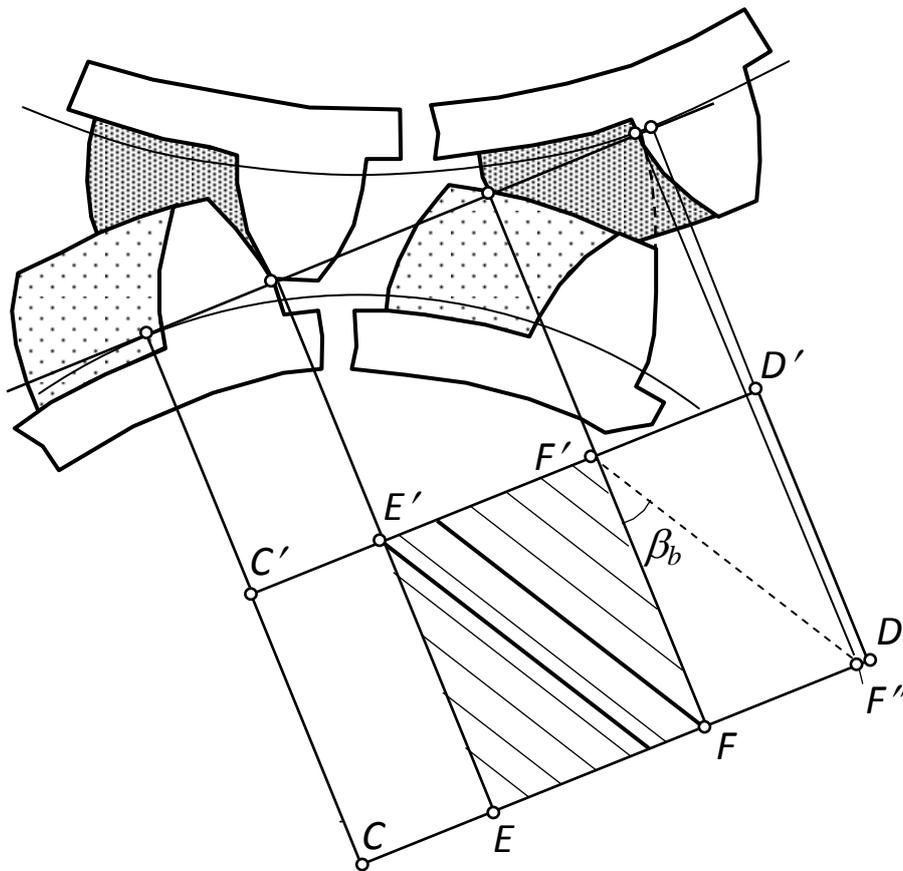


Рис. 2.22

Об уровне шума. Контактная линия косых зубьев начинается с точки  $E$  и нарастает постепенно. Нарастание заканчивается в точке  $E'$ . От  $E'$  до  $F$  линия контакта имеет полную длину (показана жирной линией). От  $F$  до  $F'$  длина линии зацепления сокращается до точки. Плавное нарастание и убывание длины контактной линии влечёт за собой плавное изменение нагрузки на зуб. Это, в свою очередь, уменьшает шум при работе передачи.

## 2.6 Конические зацепления

Это – зацепления с пересекающимися осями колёс. Продольные линии зубьев этих зацеплений могут быть как прямолинейными, так и криволинейными.

### 2.6.1 Образование прямозубого зацепления

Боковые поверхности зубьев конических колёс формируют в принципе так же, как и цилиндрических. Разница лишь в том, что основные цилиндры заменяют основными конусами –  $B_1$  и  $B_2$  (рис. 2.23, а).

Основания конусов лежат на сфере  $S$ , ограничивающей зацепление снаружи. По конусам перекатывается без скольжения плоскость  $T$ , несущая рисующую линию  $OK$ . В пространстве каждого из конусов точка  $K$  этой прямой описывает эвольвенты  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ , лежащие на сфере  $S$ . Прочие точки прямой  $OK$  описывают эвольвенты, лежащие на сферах меньшего радиуса. Совокупность всех таких эвольвент образует боковые поверхности прямозубого конического зацепления.

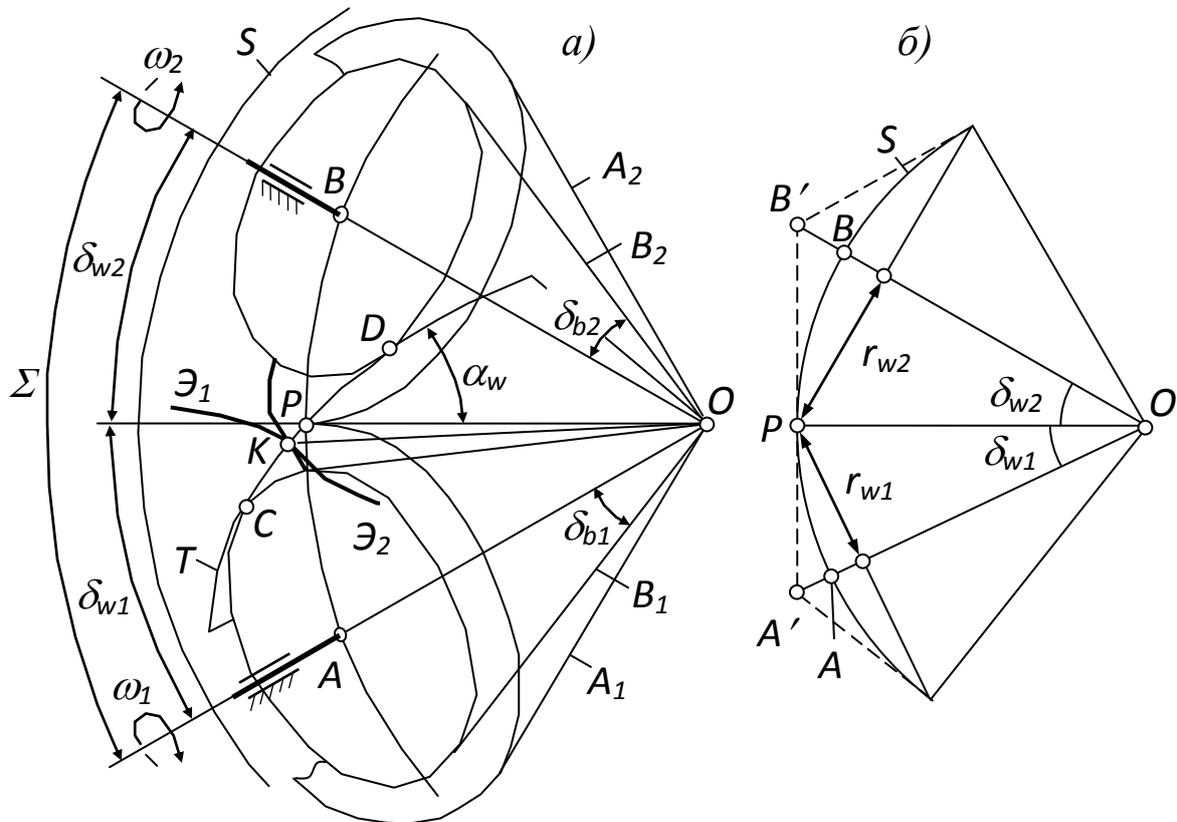


Рис. 2.23

Рисующая прямая  $OK$  оказывается одновременно линией контакта зубьев. Точка  $P$  – полюс зацепления, прямая  $OP$  – полюсная линия, по ней касаются друг друга аксоиды  $A_1, A_2$ , они же – *начальные конусы*. Дуга  $CD$  – линия зацепления,  $\alpha_w$  – угол зацепления, плоскость его отсчёта перпендикулярна межосевой плоскости  $AOB$ .

**Передаточное отношение.** Как и в плоском зацеплении передаточное отношение определяют числа зубьев, а также радиусы основных и начальных окружностей. В коническом зацеплении передаточное отношение определяют также углы  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$  начальных конусов (рис. 2.23, б):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_{w1}}{r_{w2}} = \frac{OP \sin \delta_{w1}}{OP \sin \delta_{w2}} = \frac{\sin \delta_{w1}}{\sin \delta_{w2}} \quad (2.29)$$

### 2.6.2 Изготовление зацепления

**Прямозубое зацепление.** Аналогом производящего речного контура, известного по плоскому зацеплению, является при этом контур  $ПК$ , построенный на сфере (рис. 2.24, а).

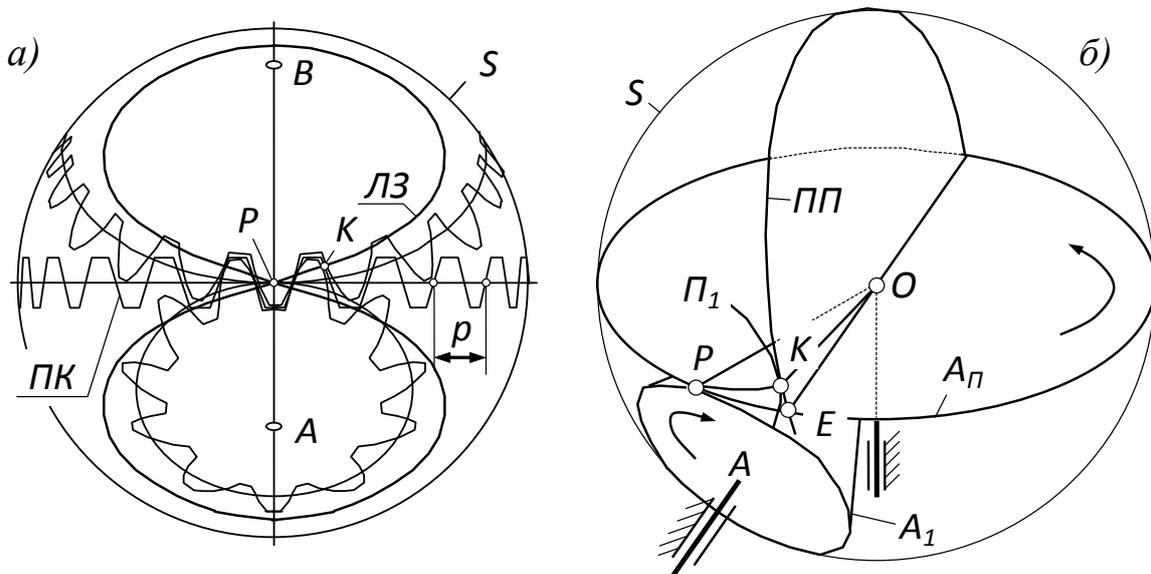


Рис. 2.24

При изготовлении зацепления без коррекции делительная линия производящего контура лежит в плоскости так называемого большого круга, проходящего через центр сферы. Этот круг обкатывается по начальным конусам производимого зацепления и, следовательно, является ещё одним аксоидом –  $A_{II}$  (2.24, б).

Профили «зубьев» производящего контура лежат в плоскостях, проходящих через центр сферы, и если смотреть на профиль с ребра, то он будет выглядеть прямолинейным. Таким образом, сферический производящий контур в некотором смысле прямобочный. Соединяя точки излома контура с центром сферы, получают *плоское производящее колесо* с плоскими боковыми поверхностями «зубьев».

Основные параметры сферического производящего контура такие же, как у плоского. В частности, угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ , шаг  $p = \pi m$ . Модуль по-прежнему выбирают из стандартного ряда предпочтительных чисел, при этом радиус  $R$  сферы  $S$ , ограничивающей зацепление снаружи, подчиняют уравнению  $2\pi R = pz$ .

На первый взгляд, зацепление, произведённое прямобочным колесом, должно быть эвольвентным, но это не так. Производящая плоскость  $ПП$  (см. рис. 2.24, б), вмещающая производящий профиль, располагается наклонно (под углом  $\alpha = 20^\circ$  к вертикали) и составляет единое целое с аксоидом  $A_{\Pi}$ . Аксоид  $A_{\Pi}$  обкатывается по аксоидам  $A_1$  и  $A_2$  производимого зацепления  $\Pi_1, \Pi_2$ . Для простоты рисунка аксоид  $A_2$  и профиль  $\Pi_2$  не показаны. Представление о недостающих элементах можно получить по рис. 2.24, а.

Контактная линия  $OK$  производящей и обеих производимых поверхностей есть линия пересечения производящей плоскости  $ПП$  и плоскости  $РОК$ , перпендикулярной  $ПП$ . Перпендикулярность следует из основной теоремы плоского зацепления: нормаль в точке касания зубьев проходит через полюс зацепления. В роли нормали (перпендикуляра к  $EK$ ) выступает здесь дуга  $PK$ .

Нетрудно видеть, что по мере удаления точки  $E$  от  $P$  угол  $KPE$  возрастает. В частности, при угле  $POE = 90^\circ$  угол  $KPE$  достигает того же значения. Ввиду переменности угла  $KPE$  линия зацепления  $ЛЗ$  (рис. 2.24, а) имеет вид восьмёрки. Отсюда рассматриваемое зацепление называется *октоидальным* (от латинского *octo* – восемь).

Вблизи полюса, где реально взаимодействуют зубья, октоидальное зацепление практически не отличается от эвольвентного. Отсюда оно называется *квазиэвольвентным*. Приставка *квази-* означает *почти*. Октоидальное зацепление, как и эвольвентное, имеет

постоянное передаточное отношение, но не сохраняет этого постоянства при изменении межосевого угла  $\Sigma$  (см. рис. 2.23).

### 2.6.3 Образование зацепления с косыми и круговыми зубьями

Чтобы улучшить эксплуатационные показатели конических зацеплений, их делают также с косыми зубьями и даже криволинейными. На рис. 2.25, *а* показано изготовление зацепления с косыми зубьями. Производящая поверхность *ПП* при этом по-прежнему плоская, но располагается по касательной *t-t* к некоторой окружности *E*, из-за чего зубья называют тангенциальными.

Прямые и тангенциальные зубья требуют возвратных движений режущего инструмента. Из-за холостых ходов производительность зубонарезания оказывается минимальной. Более выгодными по производительности и показателям самого зацепления являются круговые зубья. Производящая поверхность *ПП* для таких зубьев образуется резцовой головкой *З* (рис. 2.25, *б*).

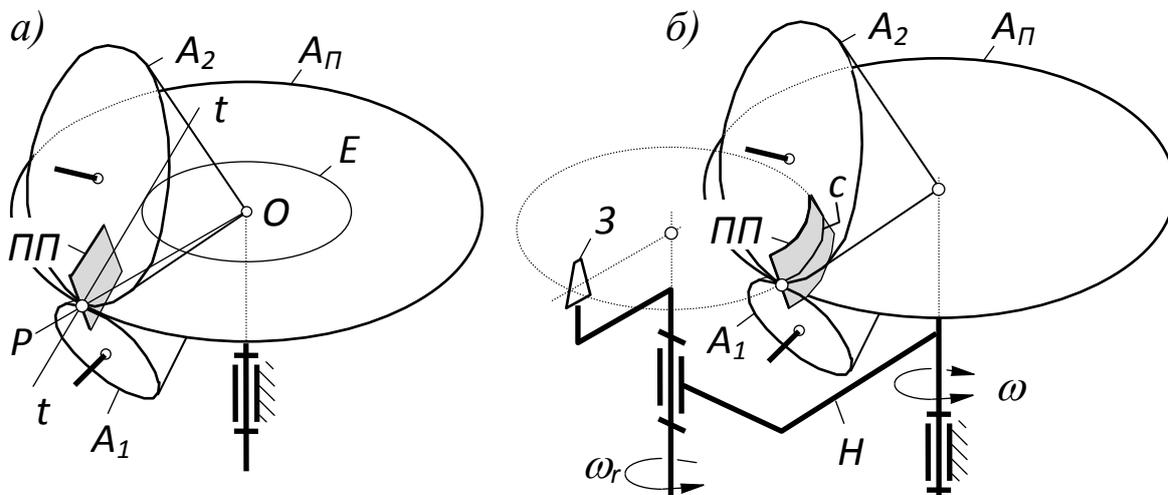


Рис. 2.25

Резцовая головка выполняется в виде диска с многочисленными резцами, расположенными на его торце. На рисунке показан только один резец. Он представлен своими режущими кромками. Поверхность *ПП* на рисунке образуется внешней кромкой резца. Наиболее распространённой является коническая производящая поверхность.

С применением резцовой головки процесс обработки одного зуба становится непрерывным. Существуют станки, у которых резец

совершает более сложное движение, позволяющее сделать процесс зубонарезания полностью непрерывным.

## 2.7 Зацепления со скрещивающимися осями

Как известно из теоретической механики, при скрещивающихся осях взаимное движение тел характеризуют поверхности, имеющие форму гиперболоидов, поэтому зацепления со скрещивающимися осями называются также гиперболоидными. Гиперболоиды перекатываются друг по другу и скользят по линии соприкосновения. В зацеплениях с параллельными и пересекающимися осями поверхности взаимного обката мы называли начальными и тем самым отождествляли их. На самом деле это не одно и то же и выявляется только при скрещивающихся осях.

### 2.7.1 Начальные поверхности

*Начальными поверхностями называются соосные соприкасающиеся поверхности (коротко, СС-поверхности), на которых линии зубьев, или идентичные им линии, имеют общую касательную, и эта касательная направлена вдоль относительной скорости в точке касания. В теории зацеплений слово «соосные» означает «соосные колёсам». Словосочетание «линии зубьев» понимается как линии пересечения боковых поверхностей зубьев с одной из соосных поверхностей колеса. Идентичными называются линии зубьев, полученные смещением действительных линий зубьев по соосной поверхности в окружном направлении.*

Начальные поверхности цилиндрических и конических зацеплений. Точки касания СС-поверхностей цилиндрических и конических зацеплений лежат в межосевой плоскости. В любой точке касания СС-поверхностей, не совпадающих с аксоидами, скорость относительного движения перпендикулярна межосевой плоскости. Если эти поверхности принять за начальные, то общая касательная к линиям зубьев на этих поверхностях должна будет располагаться тоже перпендикулярно межосевой плоскости. Однако передача движения в этом случае невозможна, так как давление зуба на зуб лежит в межосевой плоскости и не создаёт момента относительно оси колеса.

В то же время в любой точке касания аксоидов относительная скорость равна нулю, и линии зубьев могут быть сориентированы в любом желаемом направлении, в том числе и полезном. Следовательно, в цилиндрических и конических зацеплениях за начальные поверхности можно принимать только аксоиды. В гиперболоидных зацеплениях начальные поверхности могут быть произвольными.

### 2.7.2 Винтовое зацепление

Это простейшее из гиперболоидных зацеплений. За начальные поверхности принимаются в нём цилиндры 1, 2 произвольных – первоначально – радиусов  $r_{w1}$ ,  $r_{w2}$  (рис. 2.26).

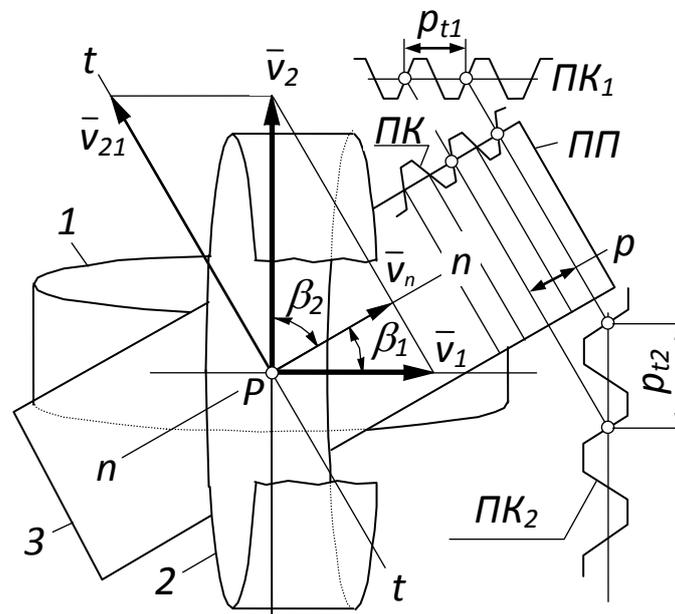


Рис. 2.26

Начальные поверхности касаются друг друга в точке  $P$ , но это не полюс зацепления: при скрещающихся осях такого понятия не существует. В точке  $P$  колёса имеют скорости  $v_1 = \omega_1 r_{w1}$  и  $v_2 = \omega_2 r_{w2}$ . Представляя скорость точки  $P_2$  в виде  $v_2 = v_1 + v_{21}$ , получают относительную скорость  $v_{21}$ . Согласно определению начальных поверхностей, касательная  $t-t$  к линиям зубьев в точке  $P$  должна проходить вдоль этой скорости.

Чтобы зубья шли друг за другом неотрывно, проекции скоростей  $v_1$ ,  $v_2$  на нормаль  $n-n$  к линиям зубьев должны быть равны друг другу. Отсюда:  $\omega_1 r_{w1} \cos \beta_1 = \omega_2 r_{w2} \cos \beta_2$  и, далее,

$$\frac{r_{w1} \cos \beta_1}{r_{w2} \cos \beta_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (2.30)$$

Формула показывает, что одно и то же соотношение скоростей можно получить при разных соотношениях радиусов начальных цилиндров. Для этого достаточно изменить соотношение косинусов, т. е. изменить направление линии зубьев  $t-t$ .

В нашем примере  $\beta_1 = 90^\circ - \beta_2$ , и задача о направлении зубьев решается проще. Подставляя  $\beta_1$  в (2.30), получают  $\frac{r_{w1}}{r_{w2}} \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ .

Отсюда  $\beta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$ . Вместо отношения  $\omega_2/\omega_1$  можно подставить  $z_1/z_2$  и тогда

$$\beta_2 = \operatorname{arctg} \frac{z_1}{z_2} \frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \quad (2.31)$$

Изготовление винтового зацепления. Зацепление формирует производящая поверхность  $III$ . При изготовлении зацепления без коррекции, что далее предполагается, делительная плоскость производящей поверхности касается начальных цилиндров. Чтобы обеспечить неотрывность производящих и производимых зубьев, линии производящих зубьев располагают по касательной  $t-t$  и перемещают по нормали  $n-n$  со скоростью  $v_n$ .

Винтовое зацепление может иметь любые профили зубьев, но на практике они эвольвентные. При этом нормальное сечение производящей поверхности (плоскостью  $n-n$ ) представляет собой исходный производящий контур  $ПК$ , известный по плоскому зацеплению. Как и в косозубом зацеплении, имеют смысл торцевые сечения  $ПК_1$ ,  $ПК_2$  производящей поверхности. Их параметры – шаг, модуль и угол профиля – вычисляются по известным нам формулам.

Перемещение производящей поверхности по нормали  $n-n$  можно представить как результат качения по начальному цилиндру какого-либо колеса и скольжения по касательной  $t-t$ . Скольжение не влияет на характер движений торцевых сечений, следовательно, эти сечения катятся по начальным окружностям. Исходя из качения, можно рассчитать радиусы начальных окружностей.

Порядок расчёта. Задаются числами зубьев  $z_1$ ,  $z_2$ , модулем  $m$  и отношением радиусов  $r_{w1}/r_{w2}$ . По этим данным вычисляют углы

$\beta_2, \beta_1$ , торцевые модули  $m_{t_i} = \frac{m}{\cos \beta_i}$  ( $i = 1, 2$ ), радиусы делительных окружностей  $r_i = \frac{m_{t_i} z_i}{2}$ . Последние равны радиусам начальных окружностей, что и требуется.

Как и в косозубом зацеплении, производящая плоскость (боковая плоскость производящей поверхности) касается каждого из производимых зубьев по прямой. Но линии касания не сливаются в одну прямую, а пересекаются. В результате произведённые зубья касаются друг друга только в одной точке. Таким образом, *винтовое зацепление является точечным*.

В винтовом зацеплении велика скорость  $v_{21}$  продольного скольжения зубьев. В сочетании с точечным касанием выпуклых зубьев это не позволяет применять винтовое зацепление при больших нагрузках.

### 2.7.3 Червячное зацепление

Зацепление состоит из червяка 1 и червячного колеса 2 (рис. 2.27, а). Червяк представляет собой однозаходный или многозаходный винт. Число заходов считается числом зубьев червяка. Центральная точка касания начальных поверхностей червячного зацепления располагается на линии кратчайшего расстояния между осями. В этой части червячное зацепление не отличается от винтового.

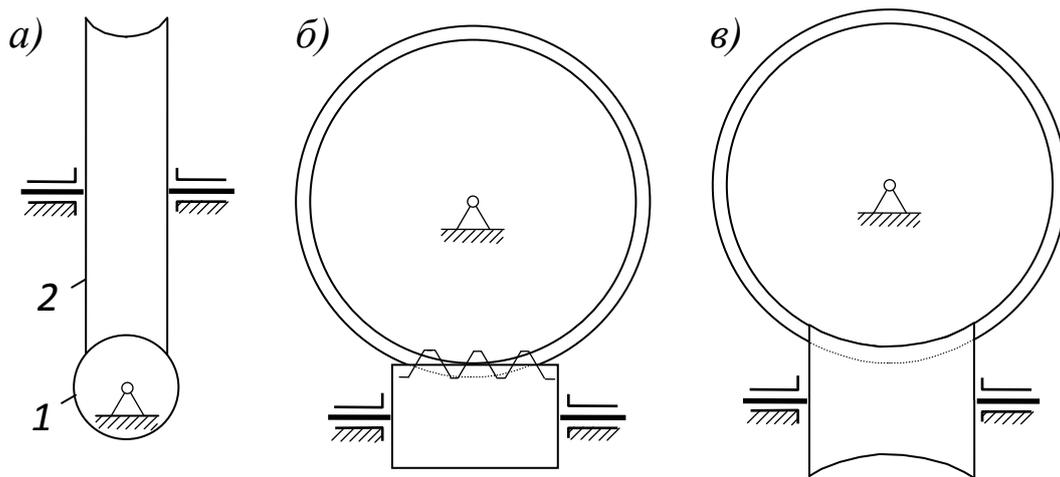


Рис. 2.27

Чтобы повысить нагрузочную способность зацепления, начальные поверхности делают облегающими друг друга. Начальную по-

верхность червячного колеса делают тороидальной, а у червяка – цилиндрической или тоже тороидальной (рис. 2.27, б, в).

В первом случае касание начальных поверхностей происходит по линии, во втором – по поверхности. Червяк с тороидальной начальной поверхностью называется глобоидным, т. е. охватывающим. Охватывающая форма увеличивает количество зубьев, находящихся в зацеплении одновременно.

Другим средством, повышающим нагрузочную способность зацепления, является образование червячного колеса производящей поверхностью, *совпадающей* с поверхностью червяка. Производящая поверхность и производимое червячное колесо располагаются относительно друг друга так же, как в рабочем зацеплении, и вращаются со скоростями, обратными числам зубьев рабочего зацепления. При этом зубья станочного и рабочего зацеплений касаются друг друга по линии.

Теоретически форма поверхности червяка может быть любой. Но поскольку с ней должна совпадать физическая производящая поверхность, то на практике выбор поверхности червяка – это выбор существующего стандартного инструмента. Наибольшее распространение имеют червяки и инструменты – червячные фрезы – с архимедовой и эвольвентной винтовыми поверхностями. Первая образуется вращательным и поступательным движением прямой  $AB$ , *пересекающей* ось червяка (рис. 2.28, а), вторая – прямой  $AB$ , *смещённой* на некоторое расстояние  $BC$  (рис. 2.28, б).

В обоих случаях скорости  $\omega$ ,  $v$  вращательного и поступательного движений постоянны. В случае б прямая  $AB$  располагается в плоскости, касательной к цилиндру радиуса  $BC$ . Угол наклона  $\alpha$  прямой  $AB$  равен углу подъёма винтовой линии  $h$ , описываемой точкой  $B$  на цилиндре  $E$ . Своё название поверхности получили за торцевые сечения. Первое является спиралью Архимеда (рис. 2.28, в), второе – эвольвентой окружности радиуса  $BC$  (рис. 2.28, з).

Архимедова винтовая поверхность должна быть знакома читателю по резьбовым соединениям. Эвольвентная винтовая поверхность известна по косозубому зацеплению. Там она образовывалась прямой линией, принадлежащей гибкой нерастяжимой ленте, перематывающейся с одного цилиндра на другой. Названным

объектам на данном рисунке соответствует прямая  $AB$ , которую можно считать принадлежащей ленте  $L$ , наматывающейся на цилиндр  $E$ . Разница лишь в том, что у косозубого колеса угол  $\alpha$  ближе к  $90^\circ$ , а у червяка ближе к нулю. Таким образом, эвольвентный червяк – это сильно закрученное косозубое эвольвентное колесо.

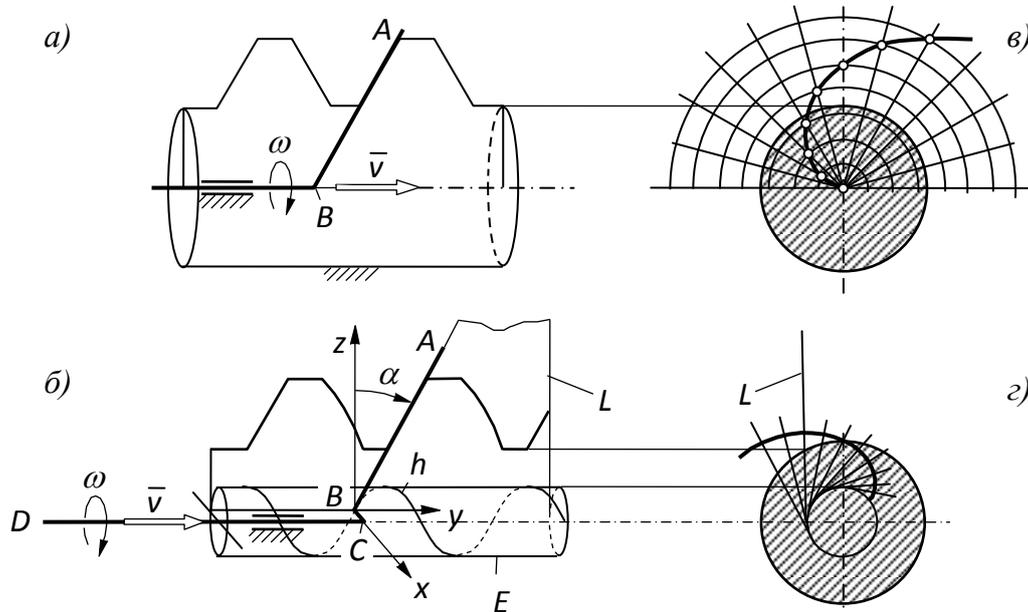


Рис. 2.28

Если угол  $\alpha$  не равен углу подъёма винтовой линии, то в торцевом сечении получается удлинённая или укороченная эвольвента. Червяк с поверхностью, соответствующей этому случаю, называется конволютным.

Архимедова и эвольвентная поверхности линейчатые. Сечение первой прямолинейно в осевой плоскости, сечение второй прямолинейно в плоскости  $Buz$ . Несмотря на линейчатость, к архимедовой поверхности невозможно провести касательную плоскость. По этой причине становится невозможной обработка червяка плоскостью шлифовального круга. Эвольвентный и конволютный червяки лишены этого недостатка.

Образование зацепления производящей поверхностью, совпадающей с поверхностью одного из колёс, известно как второй способ Оливье. Первый способ состоит в том, что зацепление образуется от поверхности, не совпадающей ни с одним из колёс. Все зацепления, которые рассматривались до сих пор, т. е. до червячного, образовывались по первому способу.

## 2.8 Зубчатые передачи

### 2.8.1 Передачи с неподвижными осями колёс

Основная задача кинематического анализа любых зубчатых передач состоит в определении передаточного отношения. Как и в плоском зацеплении, в любой передаче, состоящей из двух вращающихся звеньев, передаточное отношение от первого звена ко второму

$$u_{12} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.32)$$

Для более сложных передач с неподвижными осями передаточное отношение от первого звена к последнему -му определяют по формуле

$$u_{1,n} = u_{1,2} u_{2,3} u_{3,4} \dots u_{n-1,n}. \quad (2.33)$$

Индексы при  $u$  указывают номера звеньев. Заменяя каждое  $u$  отношением скоростей, получают:  $\frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} \dots \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$ . После сокращений уравнение обращается в тождество, что доказывает справедливость формулы (2.33).

**Пример.** В передаче, изображённой на рис. 2.29, известны числа зубьев  $z_1 \dots z_4$  всех колёс. Требуется определить передаточное отношение  $u_{1,4}$ .

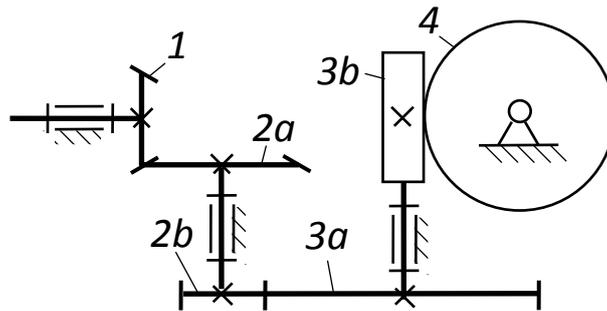


Рис. 2.29

Решение.  $u_{1,n} = u_{1,2} u_{2,3} u_{3,4} = \frac{z_{2a}}{z_1} \frac{z_{3a}}{z_{2b}} \frac{z_4}{z_{3b}}$ .

Рассмотренная передача называется *ступенчатой*. Колёса  $1, 2a$  образуют первую ступень;  $3a, 2b$  – вторую;  $4, 3b$  – третью. Если все колёса лежат в одной плоскости или, говоря иначе, расположены в один ряд, то передача называется *рядовой*, пример – на рис. 2.30.

Для этой передачи  $u_{1,4} = u_{1,2}u_{2,3}u_{3,4} = \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3} = \frac{z_4}{z_1}$ .

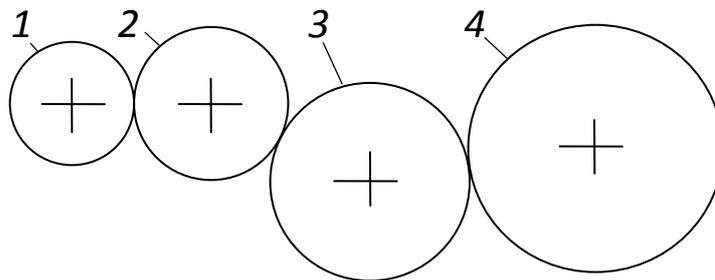


Рис. 2.30

Результат показывает, что передаточное отношение рядовой передачи зависит от чисел зубьев только крайних колёс. Ступенчатая передача не обладает таким свойством.

### 2.8.2 Анализ планетарных передач

Передача называется планетарной, если она содержит хотя бы одно колесо с подвижной осью (рис. 2.31, а, б). Колесо с подвижной осью называется *сателлитом*. В данном примере – это колесо 2. Звено  $H$ , несущее сателлит, называется *водилом*. Звенья 1, 3,  $H$  – *центральные*. Ось, проходящая через точку  $A$ , – *главная*.

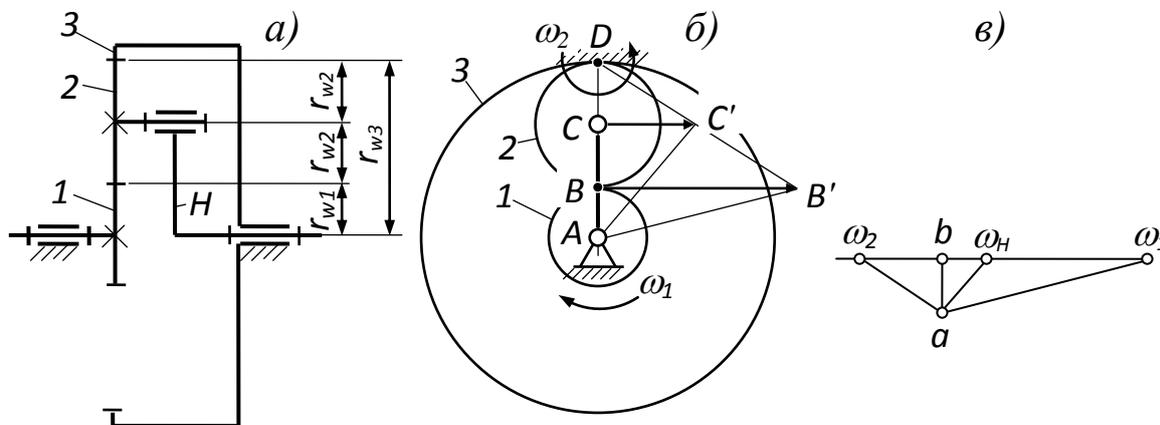


Рис. 2.31

Сателлитов может быть несколько, это увеличивает нагрузочную способность передачи, однако для кинематического анализа достаточно принять во внимание только один сателлит.

Колёса представлены на схеме своими центроидами или, иначе, начальными окружностями. Числа зубьев  $z_1, z_2, z_3$  всех колёс при анализе считаются известными, поэтому есть возможность изобразить схему в некотором масштабе.

Основная задача анализа состоит в определении передаточного отношения  $u_{1,H}$ . Это – передаточное отношение от центрального колеса к водилу. Задача может быть решена как графически, так и аналитически. Графическое решение опирается на картины линейных и угловых скоростей.

Картина линейных скоростей представляет собой совокупность линий распределения скоростей всех точек, лежащих на оси, проходящей вдоль водила. Для построения картины схему изображают в произвольном масштабе, при этом радиусы начальных окружностей определяют исходя из пропорциональности этих радиусов числам зубьев. Обозначают шарниры –  $A, C$  и точки касания –  $B, D$  окружностей всех колёс. Задаются скоростью какой-нибудь из обозначенных точек, например скоростью точки  $B$  колёс  $1$  и  $2$ . Задаваемую скорость изображают вектором  $BB'$  произвольной длины. Отмечают, что колесо  $1$  вращается вокруг точки  $A$ . Соединив  $A$  и  $B'$ , получают линию распределения скоростей колеса  $1$ .

Скорость точки  $B$  сателлита такая же, как точки  $B$  колеса  $1$ . Сателлит катится без скольжения по окружности колеса  $3$ . Точка  $D$  является мгновенным центром вращения сателлита. Соединяя  $D$  и  $B'$ , получают линию распределения скоростей сателлита. С помощью этой линии находят скорость  $CC'$  в центре сателлита.

Скорость на подвижном конце водила такая же, как в центре сателлита. Водило вращается вокруг точки  $A$ . Соединяя  $A$  и  $C'$ , получают линию распределения скоростей водила. На этом построение картины линейных скоростей завершено.

Картина угловых скоростей. Если все линейные скорости отнести к одному и тому же расстоянию  $r$  от центра вращения, то на основании известной формулы  $v = \omega r$  эти линейные скорости можно рассматривать как угловые. В качестве  $r$  принимают произвольный отрезок  $ab$  (рис. 2.31, в).

Из точки  $a$  проводят лучи, параллельные линиям распределения скоростей. На прямой, перпендикулярной  $ab$ , эти лучи отсекают отрезки, изображающие угловые скорости соответствующих звеньев. Отсчёт скоростей ведётся от точки  $b$ . Например, отрезок  $b\omega_1$  изображает скорость  $\omega_1$ ,  $b\omega_H$  – скорость  $\omega_H$ .

Для определения передаточного отношения масштаб картины не имеет значения, поэтому достаточно измерить длины отрезков  $b\omega_1$ ,  $b\omega_H$  и поделить один на другой.

Аналитическое определение величины  $u_{1,H}$ . Формулу передаточного отношения выводят методом обращения движения относительно водила. В данном случае метод состоит в том, что стойке механизма вместе со всем его содержимым сообщают вращение вокруг главной оси со скоростью  $-\omega_H$ , т. е. со скоростью водила, но в обратном направлении (рис. 2.32).

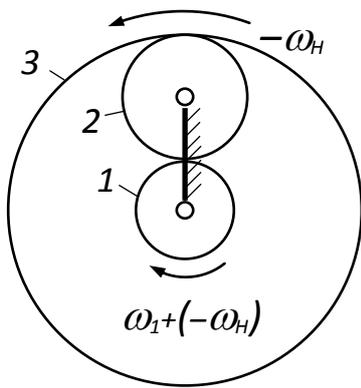


Рис. 2.32

Под содержимым подразумеваются все звенья механизма и двигатель, вращающий колесо 1. После обращения движения водило становится неподвижным; колесо 3 вращается со скоростью

$$\omega_3^{(H)} = -\omega_H;$$

колесо 1 имеет скорость  $\omega_1$  относительно корпуса и  $\omega_H$  вместе с корпусом; результирующая скорость

$$\omega_1^{(H)} = \omega_1 + -\omega_H .$$

Передаточное отношение от звена 1 к 3

$$u_{1,3}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 + (-\omega_H)}{-\omega_H} = -u_{1,H} + 1. \text{ Отсюда}$$

$$\boxed{u_{1,H} = 1 - u_{1,3}^{(H)}}. \quad (2.34)$$

Обращённый механизм равносителен переставленному на водило. На этом основании  $u_{1,3}^{(H)}$  можно называть передаточным отношением механизма, переставленного на водило. С учётом этого замечания формула (2.33) читается так: *Передаточное отношение от центрального колеса к водилу равно единице минус передаточное отношение от того же центрального колеса к другому центральному – после перестановки механизма на водило.*

После перестановки на водило планетарная передача превращается в обыкновенную и для неё становится справедливой форму-

ла (2.32). Применяя эту формулу к планетарным механизмам, важно учитывать знак передаточного отношения: он положительный, если колёса вращаются в одноимённых направлениях, и отрицательный в противном случае. На основании этого правила передаточное отношение внутреннего зацепления положительно, внешнего – отрицательно.

Наш обращённый механизм представляет собой рядовую передачу. Для неё  $u_{1,3}^{(H)} = -\frac{z_3}{z_1}$ . Знак «минус» поставлен потому, что колёса 1 и 3 вращаются во взаимно противоположных направлениях. Искомое передаточное отношение

$$u_{1,H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (2.35)$$

Формула (2.33) применима и к более сложным планетарным передачам. Пусть требуется определить передаточное отношение  $u_{1,H}$  в механизме с двухвенцовым сателлитом (рис. 2.33, а). Предыдущий механизм был с одновенцовым сателлитом.

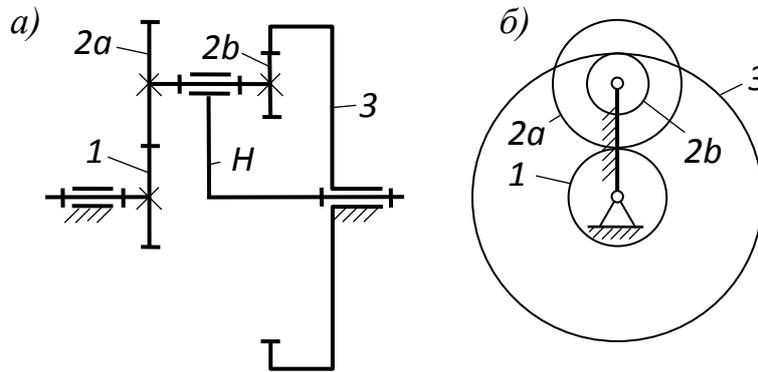


Рис. 2.33

Решение.  $u_{1,H} = 1 - u_{1,3}^{(H)}$ . Для определения  $u_{1,3}^{(H)}$  механизм переставляют на водило (рис. 2.33, б). После перестановки механизм превращается в передачу с неподвижными осями. Для этой передачи  $u_{1,3}^H = u_{1,2}^H u_{2,3}^H = -\frac{z_{2a}}{z_1} \frac{z_3}{z_{2b}}$ . Минус у первого множителя стоит потому, что звенья 1, 2 вращаются в разные стороны. После подстановки  $u_{1,3}^H$  в исходную формулу получают:

$$u_{1,H} = 1 + \frac{z_{2a} z_3}{z_1 z_{2b}}.$$

### 2.8.3 Синтез простейшей планетарной передачи

Синтез состоит в подборе чисел зубьев. Основным условием синтеза является обеспечение заданного передаточного отношения  $u_{1,H}$ . Дополнительными являются условия *соосности*, *сборки* и *соседства* сателлитов.

Условие соосности состоит в том, чтобы оси центральных звеньев лежали на одной прямой. Условие сборки или, иначе, собираемости передачи состоит в том, чтобы напротив зуба одного колеса находилась впадина другого. При одном сателлите это условие выполняется всегда, при нескольких сателлитах числа зубьев надо подбирать специально. Условие соседства сателлитов состоит в том, чтобы соседние сателлиты не задевали друг друга. Такое возможно, начиная с трёх сателлитов.

Для упрощения задачи выведем формулы, выражающие все условия синтеза, кроме соседства сателлитов.

Основное условие синтеза выражает формула:

$$\boxed{u_{1,H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}}. \quad (2.35)$$

Условие соосности удовлетворяется, если радиусы начальных окружностей связаны уравнением  $r_{w1} + 2r_{w2} = r_{w3}$  (см. рис. 2.31). Как отмечалось при выводе системы (2.3), радиусы начальных окружностей пропорциональны числам зубьев. С учётом этой пропорциональности условие соосности имеет вид

$$\boxed{z_1 + 2z_2 = z_3}. \quad (2.36)$$

Условие сборки.  $k$  сателлитов делят передачу на такое же число одинаковых секторов. Один из таких секторов изображён на рис. 2.34.

Если обойти зубья по маршруту, выделенному на рисунке жирной линией, то получится цепь, содержащая некоторое целое число зубьев  $C$ . Оно складывается из секторного числа зубьев колёс  $I$  и  $3$ , плюс по половине чисел зубьев двух сателлитов. В итоге:

$$C = \frac{z_1}{k} + \frac{z_3}{k} + 2 \frac{z_2}{2}.$$

Последнее слагаемое есть целое число, равное  $z_2$ . После вычитания его из  $C$  получают новое целое  $c$ . В итоге условие сборки имеет вид

$$\boxed{\frac{z_1+z_3}{k} = c}. \quad (2.37)$$

Если задаться числами  $u_{1H}$ ,  $k$  и  $c$ , то выведенные уравнения – (2.34), (2.35), (2.36) – будут представлять собой систему с тремя неизвестными –  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ .

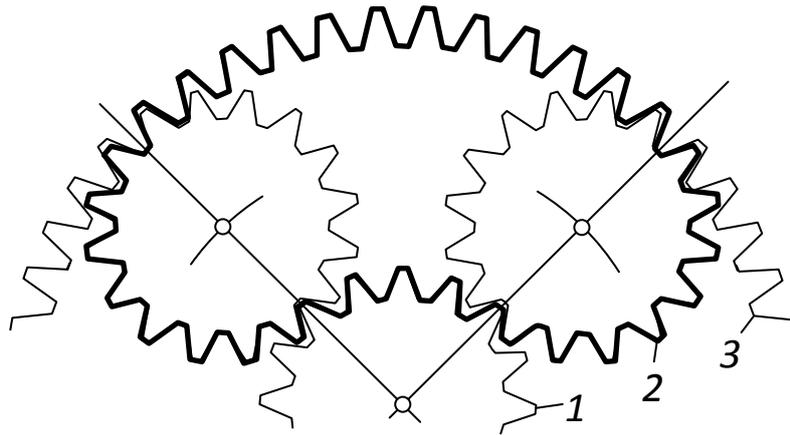


Рис. 2.34

Решив уравнения, можно получить слишком большие или, наоборот, слишком малые числа зубьев. Чтобы этого избежать, условиям синтеза придают форму пропорции. Полагая, что задаваемым будет не  $c$ , а  $z_1$  – обычно оно наименьшее, первое уравнение решают относительно  $z_3$ , второе – относительно  $z_2$ , третье – относительно  $c$ :

$$z_3 = (u_{1,H} - 1)z_1; \quad z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} = \frac{(u_{1,H} - 2)z_1}{2}; \quad c = \frac{z_1 + z_3}{k} = \frac{u_{1,H} z_1}{k}.$$

Полученные решения выстраивают в пропорцию

$$z_1 : z_2 : z_3 : c = 1 : \frac{u_{1,H} - 2}{2} : u_{1,H} - 1 : \frac{u_{1,H}}{k} z_1. \quad (2.38)$$

Заключённое в квадратные скобки представляют в виде обыкновенных несократимых дробей. Задавшись числом  $z_1$  так, чтобы все дроби стали целыми, находят  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $c$ .

**Пример.**  $u_{1,H} = 7,6$ ;  $k = 3$ . Требуется определить  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ .

**Решение.** Подставляя  $u_{1,H}$  и  $k$  в уравнение (2.37), получают:

$$z_1 : z_2 : z_3 : c = 1 : \frac{14}{5} : \frac{33}{5} : \frac{38}{15} z_1.$$

Пусть  $z_1 = 15$ , тогда скобки будут содержать только целые числа:  $[15: 42: 99: 38]$ . Из сопоставления с левой частью уравнения находят:  $z_1 = 15$ ,  $z_2 = 42$ ,  $z_3 = 99$ ,  $c = 38$ .

Пропущенное нами условие соседства сателлитов легко проверяется графически. Если условие не выполняется, то задаются другим числом сателлитов и повторяют расчёт.

### 2.8.4 Волновая передача

Передача состоит из волнообразователя  $H$ , гибкого зубчатого колеса  $1$ , ролика  $2$  и жёсткого зубчатого колеса  $3$  (рис. 2.35).

Обычно задача анализа состоит в определении передаточного отношения  $u_{H,1}$  в направлении от волнообразователя к гибкому колесу. Как и в случае планетарных передач, эта задача эффективно решается методом обращения движения. Согласно методу, корпусу механизма – звену  $3$  – сообщают скорость  $-\omega_H$ . После этого звено  $H$  останавливается, а звено  $1$  обретает скорость  $\omega_1 - \omega_H$ .

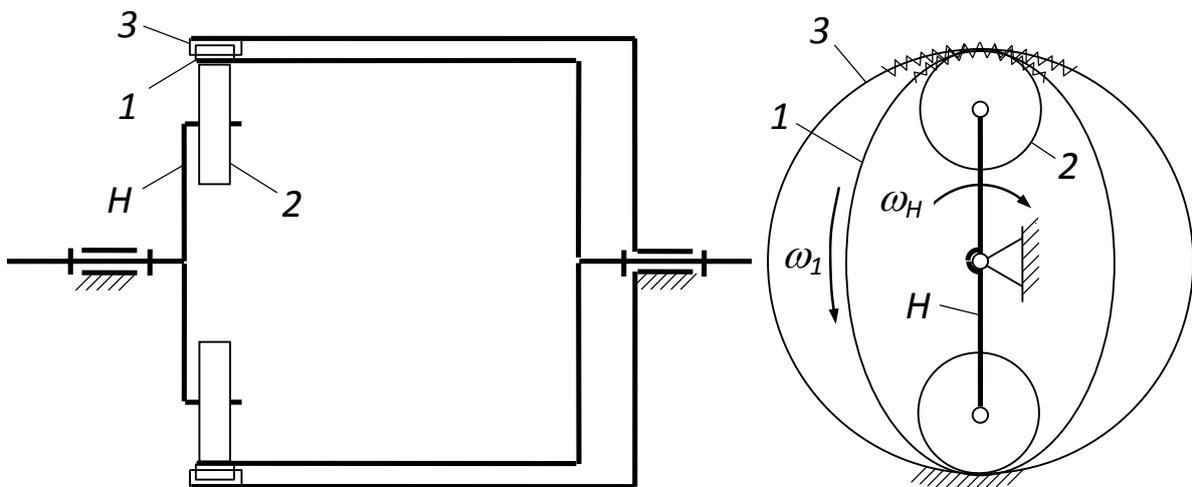


Рис. 2.35

В обращённом механизме передаточное отношение от звена  $3$  к звену  $1$  определяется по формуле  $\frac{-\omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = \frac{z_1}{z_3}$ . Отсюда после преобразований получают

$$u_{1,H} = \frac{z_1}{z_1 - z_3}. \quad (2.39)$$

Число  $z_1 < z_3$ , поэтому передаточное отношение отрицательное. Это значит, что гибкое колесо вращается навстречу волнообразователю. Чтобы деформация гибкого колеса была наименьшей,

разность  $z_3 - z_1$  должна быть минимальной. При этом получают значительные передаточные отношения.

### 2.8.5 Зубчатые дифференциалы

Зубчатый дифференциал – это планетарная передача с двумя степенями свободы. Вторая степень свободы образуется в результате освобождения неподвижного колеса передачи. На рис. 2.36 изображён дифференциал, образованный из передачи с одновенцовым сателлитом.

Анализ дифференциала состоит в определении скорости выходного звена по заданным скоростям двух входных. Число входных звеньев predeterminedено числом степеней свободы дифференциала. Пусть выходным звеном будет водило  $H$ , а входными – звенья  $1$  и  $3$ . Задача анализа может быть решена как графически, так и аналитически. При любом методе числа зубьев колёс считаются известными.

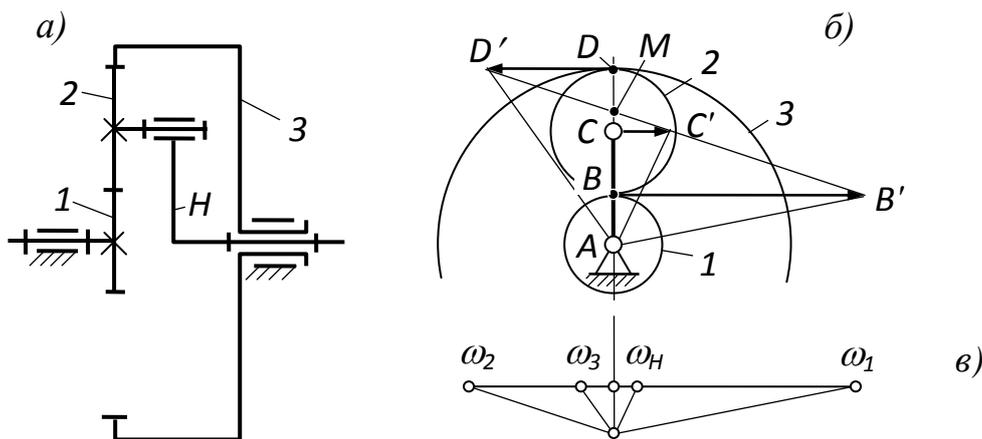


Рис. 2.36

Графический метод анализа. Как и при анализе планетарной передачи, схему дифференциала строят в некотором масштабе. Вычисляют и изображают скорости точек  $B_1$  и  $D_3$ . Пусть скорость точки  $B_1$  изображает вектор  $BB'$ , а скорость точки  $D_3$  – вектор  $DD'$ . Такие же скорости имеют одноимённые точки сателлита 2. Соединяя концы скоростей, получают линию  $B'D'$  распределения скоростей сателлита. Через неё находят мгновенный центр  $M$  вращения сателлита, а также скорость  $CC'$  шарнира  $C$ . Соединяя  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  с точкой  $A$ , получают линии распределения скоростей остальных звеньев.

По линиям распределения строят картину угловых скоростей (рис. 2,35, в). Через одну из входных скоростей вычисляют масштаб скоростей. Через масштаб находят скорость водила.

За счёт остановки и реверсирования двигателей, вращающих колёса  $I$  и  $3$ , можно получить четыре скорости водила. При равных скоростях в точках  $B$  и  $D$  водило будет неподвижным.

Аналитический метод анализа. Угол  $\varphi_H$  поворота водила является функцией  $\varphi_H(\varphi_1, \varphi_3)$  углов поворота колёс  $I$  и  $3$ . Это функция двух переменных. Переменные являются функциями времени  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ . Скорость водила есть производная от  $\varphi_H$  по времени. По правилам дифференцирования функций двух переменных получают:

$$\omega_H = \frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_3} \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_3} \omega_3.$$

Кинематический смысл частных производных, входящих в данное выражение, устанавливается остановкой одного из входных звеньев. Так, при  $\omega_3 = 0$   $\omega_H = \frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_1} \omega_1$ . Отсюда  $\frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = u_{H,1}^3$ .

Последнее называется частным передаточным отношением от водила к колесу  $I$  при неподвижном колесе  $3$ .

При  $\omega_1 = 0$   $\omega_H = \frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_3} \omega_3$ . Отсюда  $\frac{\partial \varphi_H}{\partial \varphi_3} = \frac{\omega_H}{\omega_3} = u_{H,3}^1$ .

Это ещё одно частное передаточное отношение. В итоге:

$$\boxed{\omega_H = \omega_1 u_{H,1}^3 + \omega_3 u_{H,3}^1}. \quad (2.40)$$

Остановка одного из центральных колёс превращает дифференциал в обычный планетарный механизм с одной степенью свободы. В результате частные передаточные отношения – это передаточные отношения обычных планетарных механизмов. А именно,

$$u_{H,1}^3 = \frac{1}{u_{1,H}^3} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}, \quad u_{H,3}^1 = \frac{1}{u_{3,H}^1} = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_3}}. \quad (2.41)$$

Формула (2.40) показывает, что дифференциал является суммирующим устройством. Он реализует функцию  $y = k_1 x_1 + k_2 x_2$ .

Симметричные дифференциалы. Дифференциал называется симметричным, если частные передаточные отноше-

ния, рассмотренные выше, равны друг другу. На рис. 2.37 показаны два симметричных дифференциала. Первый изображён в двух проекциях.

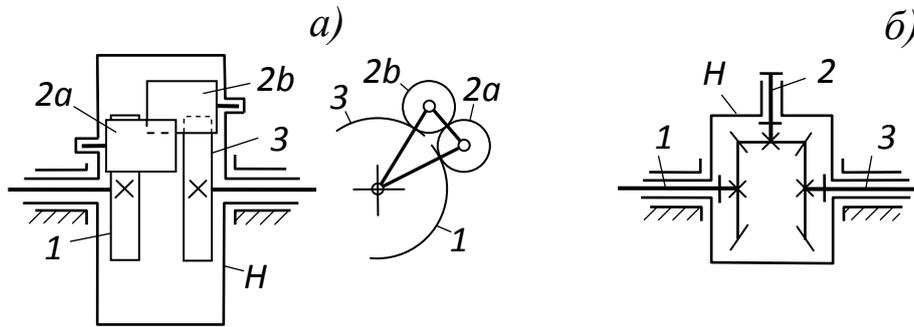


Рис. 2.37

Дифференциал *a* – цилиндрический со сцепленными сателлитами, *б* – конический. Последний называют ещё автомобильным, т. к. он применяется во всех заднеприводных автомобилях.

У обоих дифференциалов  $z_1 = z_3$ . При этом, согласно формуле (2.41), частные передаточные отношения равны друг другу –  $u_{H,1}^3 = u_{H,3}^1 = \frac{1}{2}$ . Подставляя их в формулу (2.40), получают:

$$\omega_H = \frac{\omega_1 + \omega_3}{2}. \quad (2.42)$$

Как показывает формула, в симметричном дифференциале скорость на выходе равна среднему арифметическому входных скоростей.

Ввиду равенства сил на окружности сателлита, дифференциал создаёт на каждом из колёс автомобиля одинаковые крутящие моменты. Это равенство сохраняется при движении как по прямой, так и на повороте. Дифференциал, следовательно, является ещё и *уравнительным устройством*.

**Замкнутые дифференциалы.** Замкнутый дифференциал – рекордист по передаточным отношениям. Он образуется из простого дифференциала путём введения дополнительной кинематической цепи, связывающей какие-либо два его звена. Обычно это центральные звенья – *1, 3, H*. На рис. 2.38 дополнительная цепь связывает звенья *1* и *3*.

Эта цепь отнимает у дифференциала одну степень свободы, и, следовательно, для построения картин линейных и угловых скоростей – вид *б, в* – достаточно задаться скоростью только одной точ-

ки механизма. Это может быть любая из обозначенных точек, кроме  $C$ . Начиная, например, с точки  $B$  скорости определяют в последовательности  $E, G, D, C$ .

Числа зубьев добавочной 1, 4, 3 и основной 1, 2, 3 цепей делают близкими. При этом скорости сателлита в точках  $B$  и  $D$  отличаются незначительно и передаточное отношение  $u_{1,H}$  получается очень большим.

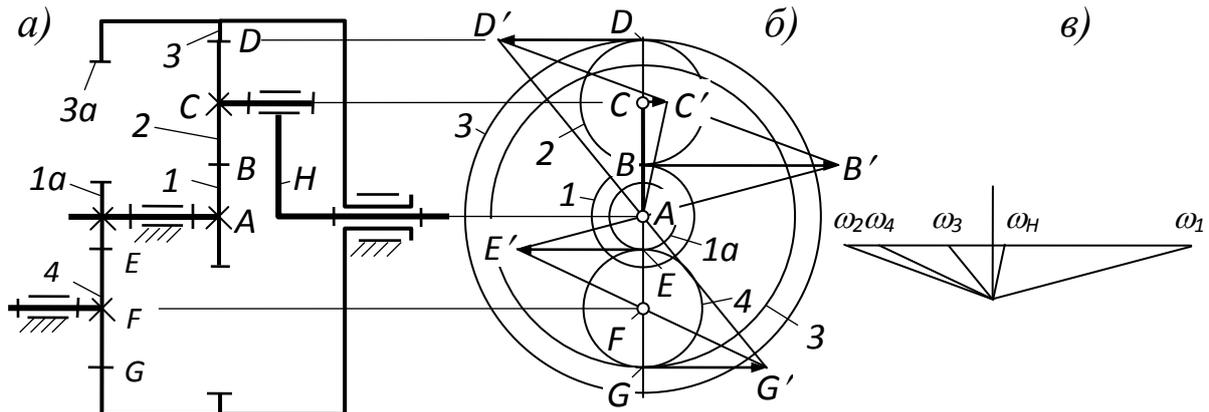


Рис. 2.38

Аналитическое определение  $u_{1,H}$ . Задачу решают обращением движения относительно водила. После обращения движения звенья 1 и 3 имеют скорости  $\omega_1 - \omega_H$  и  $\omega_3 - \omega_H$ , соответственно, водило неподвижно. Отношение скоростей

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}. \quad (2.43)$$

Чтобы в уравнении появилось нужное передаточное отношение, числитель и знаменатель его левой части делят на  $\omega_1$ . После деления получают:

$$\frac{1 - u_{H1}}{u_{3,1} - u_{H,1}} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Входящее сюда  $u_{3,1} = -\frac{z_{3a}}{z_{1a}}$ . Остаётся вывести за знак равенства  $u_{H,1}$  и взять обратное. Если требуется определить  $u_{3,H}$ , то левую часть уравнения (2.43) делят на  $\omega_3$ .

## 3 Избыточные связи в механизмах

Из курса «Сопротивление материалов», обычно предшествующего теории механизмов, известно, что при неточных составных частях изделий избыточные или, как ещё говорят, лишние связи порождают в этих изделиях внутренние напряжения, не обусловленные полезной нагрузкой. Такие же последствия имеют избыточные связи и в механизмах. Поскольку абсолютно точных изделий не существует, то важно уметь выявлять и, если необходимо, устранять избыточные связи. Связи механизма складываются из связей кинематических пар.

### 3.1 Связи кинематических пар

Связь – это ограничитель движения одного тела относительно другого. В кинематических парах ограничения создаются, прежде всего, соприкосновением звеньев. Во фрикционных механизмах к ним добавляются ограничения, создаваемые силами трения. Фрикционные механизмы здесь не рассматриваются, поэтому остаются ограничения, создаваемые соприкосновением.

В общем случае звенья механизма касаются друг друга во множестве точек. Каждая точка касания, взятая в отдельности (в отсутствие всех остальных), ограничивает взаимное движение, следовательно, она – связь. В кинематической паре столько связей, сколько в ней точек касания.

Однако не все связи равноценны. Если точки касания, а значит и связи, сначала удалить, а затем возвращать по одной, то одни из них будут ограничивать взаимное движение звеньев, другие нет. Связи, ограничивающие взаимное движение, называются *активными*, а не ограничивающие, – *пассивными*.

**Пример.** Кинематическая пара (рис. 3.1, а) состоит из шара 1, заключённого между двумя параллельными плоскостями, принадлежащими вилке 2. Шар касается вилки в двух точках и, следовательно, имеет с ней две связи – А и В. Обрезка плоскостей удаляет из пары все связи, и шар становится свободным (рис. 3.1, б).

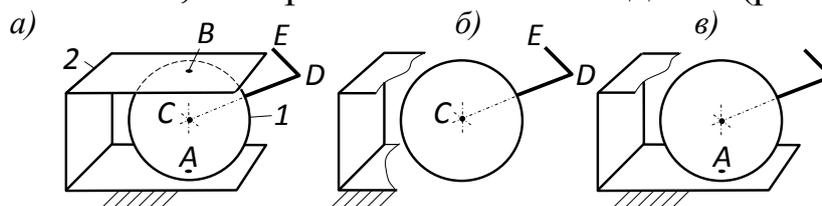


Рис. 3.1

После возвращения связи в точке  $A$  (рис. 3.1,  $в$ ) шар становится менее свободным, следовательно, связь в точке  $A$  активная. Возврат связи в точке  $B$  при сохранении связи в точке  $A$  (рис. 3.1,  $а$ ) не вносит новых ограничений на возможное движение шара относительно вилки, следовательно, связь в точке  $B$  пассивная. Если порядок возвращения связей изменить, то они поменяются ролями: связь в точке  $B$  станет активной, а в точке  $A$  пассивной.

*Активные связи можно характеризовать также как точки касания, необходимые и достаточные для обеспечения взаимного движения, которое имеют звенья при всех точках касания.*

**Пример.** Кинематическая пара (рис. 3.2,  $а$ ) состоит из цилиндра  $1$ , заключённого между двумя параллельными плоскостями, принадлежащимивилке  $2$ .

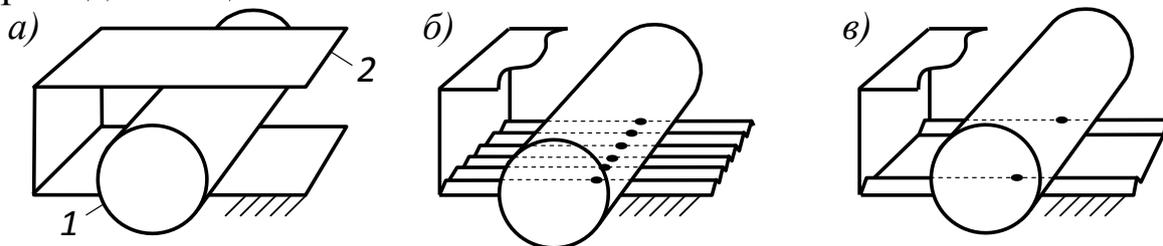


Рис. 3.2

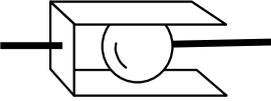
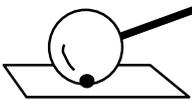
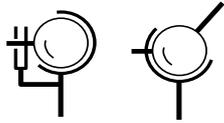
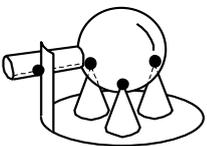
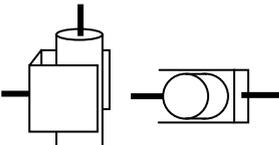
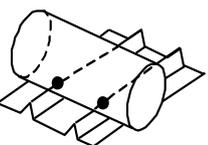
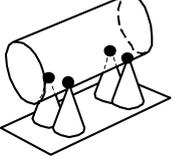
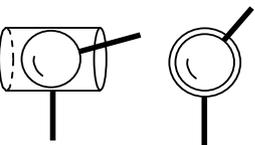
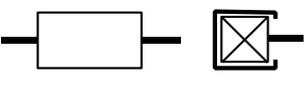
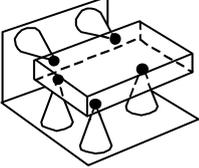
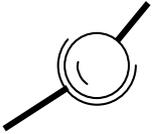
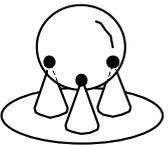
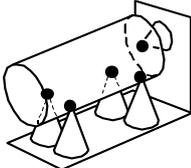
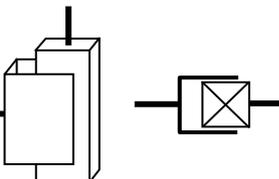
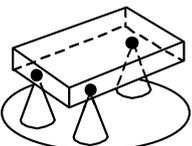
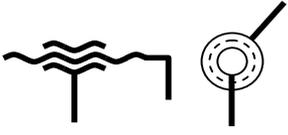
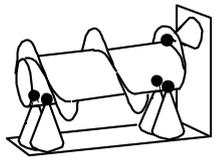
Число точек касания цилиндра с плоскостями бесконечно велико, таково же и число связей. Чтобы сделать число точек касания конечным и кинематически равноценным всем имеющимся точкам, одну из плоскостей можно удалить, а оставшуюся сделать гребенчатой (рис. 3.2,  $б$ ).

Удаление всех гребней и последующее возвращение их по одному показывает, что необходимы и достаточны только два гребня и, соответственно, две точки касания (рис. 3.2,  $в$ ). Следовательно, в исследуемой паре содержатся только две активные связи.

Пара  $в$  есть кинематический эквивалент пары  $а$ , содержащий необходимое и достаточное число точек касания. Такие пары называются далее моделями активных связей, а их изображение – схемами этих связей. В табл. 3.1 приведены схемы активных связей в наиболее распространённых кинематических парах. Буквой  $s$  обозначено число активных связей.

Важно отметить, что введение активной связи уменьшает число степеней свободы механической системы на единицу, а удаление на столько же увеличивает это число. Пассивные связи не влияют на число степеней свободы.

Таблица 3.1

Схема и название пары	Схема активных связей	$s$	Схема и название пары	Схема активных связей	$s$
 Шар-плоскость		1	 Шаровая со штифтом		4
 Цилиндр-плоскость		2	 Цилиндрическая		4
 Шар-цилиндр		2	 Поступательная		5
 Шаровая		3	 Вращательная		5
 Плоскостная		3	 Винтовая		5

Каждая из  $s$  активных связей, содержащихся в кинематической паре  $ij$ , отнимает у звена  $i$  одну из шести степеней свободы относительно звена  $j$ , поэтому оставшееся число степеней свободы  $w$  и отнятое, равное  $s$ , подчинены уравнению

$$\boxed{w + s = 6}. \quad (3.1)$$

Уравнение позволяет определять число активных связей  $s$  через число степеней свободы  $w$  и наоборот. Напомним, что *число степеней свободы* любого механического объекта равно *минимальному количеству координат, замораживание которых лишает объект подвижности относительно выбранной системы отсчёта его движений*.

Пример. Для обездвиживания винта относительно гайки (рис. 3.3) достаточно заморозить либо угол его поворота  $\varphi$ , либо осевую координату  $x$ , из чего следует, что  $w = 1$ . При этом, согласно уравнению (3.1),  $s = 6 - w = 6 - 1 = 5$ . Вычисленное  $s$  совпадает с показанным в табл. 3.1, что и следовало ожидать.

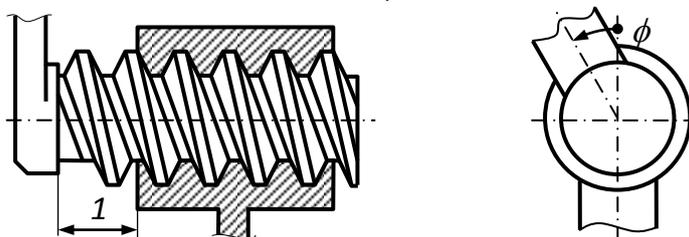


Рис. 3.3

В кинематической паре минимальное число степеней свободы одного звена относительно другого  $w_{\min} = 1$ . Из уравнения (3.1) при этом следует, что максимальное число активных связей в кинематической паре  $s_{\max} = 5$ .

### 3.2 Связи пар, избыточные для механизма

В общем случае активные связи кинематических пар могут быть поделены на активные и пассивные для механизма. Первые называются далее *необходимыми* (механизму), вторые *избыточными*. Новое деление связей демонстрируется ниже на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.4, а, б).

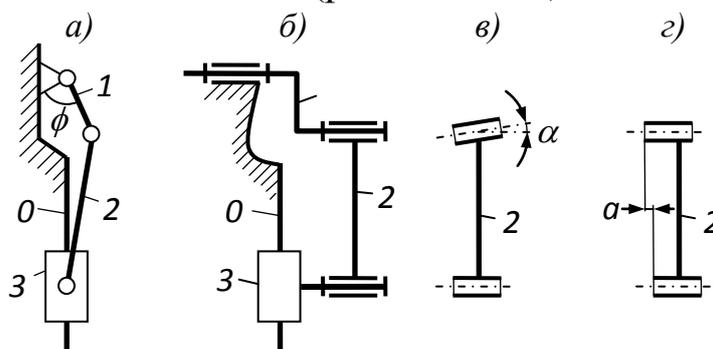


Рис. 3.4

На виде а изображена фронтальная проекция механизма, на виде б – профильная. Пара 3, 0 поступательная, остальные – вращательные. В каждой паре содержится по пять активных связей. Для примера на рис. 3.5, а показаны активные связи пары 1, 2. Связи А, В, С, D – радиальные, связь Е – осевая. Всего связей двадцать. Избыточными являются те из них, удаление которых не увеличивает числа степеней свободы механизма. В исходном со-

стоянии число степеней свободы механизма равно единице. На эту степень свободы указывает, например, координата  $\varphi$  (см. рис. 3.4, а): её замораживание лишает механизм подвижности.

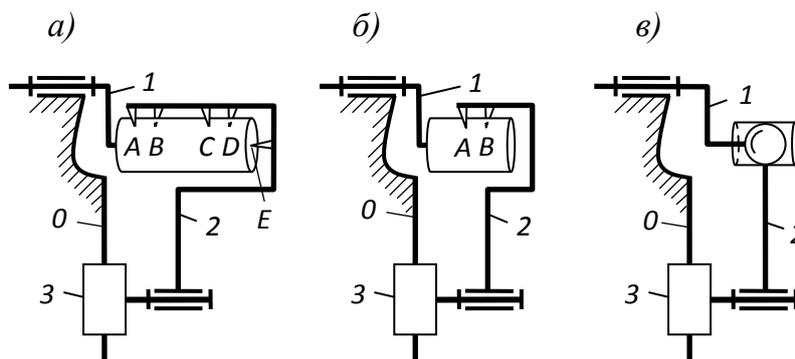


Рис. 3.5

Удаление связи в точке  $E$  (см. рис. 3.5, а) не увеличивает числа степеней свободы механизма, следовательно, связь в точке  $E$  избыточная. Последовательное удаление радиальных связей, например, в точках  $C$  и  $D$  также не увеличивает числа степеней свободы, из чего следует, что и эти связи избыточные. Дальнейшее удаление связей привело бы к появлению движений, отсутствующих в исходной схеме, и увеличению числа степеней свободы, следовательно, оставшиеся семнадцать связей необходимые. Схема механизма с одними необходимыми связями приведена на (рис. 3.5, б).

Чтобы построить на основе этой схемы механизм, необходимо заменить схему связей пары  $1, 2$  реальной двухсвязной парой, взятой из табл. 3.1. Результат замены показан на (рис. 3.5, в).

При неточных звеньях, например только при развороте  $\alpha$  (рис. 3.4, в) или осевом смещении  $a$  (рис. 3.4, г) верхней головки шатуна относительно остальной его части, в исходном механизме (рис. 3.4, б) возникнут внутренние напряжения, а в преобразованном (рис. 3.5, в) не возникнут. Этим механизмы без избыточных связей выгодно отличаются от механизмов, содержащих такие связи.

*Если нет возможности сделать звенья механизма точно или невозможно сохранить точность в эксплуатации, то механизм не должен содержать избыточных связей.*

Анализ связей можно начинать с любой кинематической пары, число избыточных связей при этом будет тем же, поэтому нельзя утверждать, что избыточные связи сосредоточены именно в паре 1, 2. Ниже выводится формула, по которой количество избыточных связей можно будет определять вычислением, а не анализом каждой связи в отдельности.

### 3.3 Структурная формула механизма

Любой механизм обладает  $w$  степенями свободы, содержит  $n$  подвижных звеньев и  $s$  активных связей во всех кинематических парах, вместе взятых. В общем случае  $s = s_n + q$ , где  $s_n$  – число необходимых связей,  $q$  – число избыточных связей. В обсуждаемом примере (см. рис. 3.4, *a, б*)  $w = 1$ ,  $n = 3$ ,  $s = 20$ ,  $s_n = 17$ ,  $q = 3$ .

После удаления всех избыточных связей (см. рис. 3.5, *б*)  $w$  не меняется. Удаление каждой необходимой связи увеличивает  $w$  на единицу. После удаления всех необходимых связей, число которых  $s_n = s - q$ , число степеней свободы возрастает и становится равным  $w + s_n$  или  $w + s - q$ . Кроме того, все  $n$  подвижных звеньев механизма становятся свободными и обладают в совокупности  $6n$  степенями свободы относительно стойки – по 6 на каждое из  $n$  звеньев. Поскольку в обоих случаях речь идёт о числе степеней свободы одной и той же системы звеньев, то

$$\boxed{w + s - q = 6n}. \quad (3.2)$$

Полученное уравнение называется структурной формулой механизма. Из формулы следует, что число избыточных связей

$$q = w + s - 6n. \quad (3.3)$$

В примере (см. рис. 3.4, *б*)  $q = 1 + 20 - 6 \cdot 3 = 3$ , что совпадает с числом избыточных связей, найденным анализом каждой связи в отдельности.

### 3.4 Устранение избыточных связей в одноконтурных механизмах

Как показано выше, механизм, изображённый на рис. 3.6, *a*, содержит три избыточные связи, пусть требуется устранить их. Устранение избыточных связей называется структурным синтезом механизмов из условия  $q = 0$ . Существуют два метода решения этой задачи: метод деформации звеньев и алгебраический метод.

### 3.4.1 Метод деформации звеньев

Согласно методу, одно из звеньев, например стойку, разрезают на две части – опору  $0$  (ноль) и направляющую  $4$  (рис. 3.6, б). Опору оставляют неподвижной, а направляющей пытаются сообщить все шесть независимых перемещений в пространстве: три поступательных – вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и три вращательных в каждой из координатных плоскостей или, как часто говорят, вращательных вокруг осей,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Независимые перемещения, сообщаемые направляющей, имитируют неточности, а также деформацию стойки в процессе эксплуатации, «деформация» и дала название методу.

Цепь  $0...4$  ( $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ ) сопротивляется перемещению направляющей вдоль оси  $y$ , а также развороту её вокруг осей  $x$  и  $z$ . В этом сопротивлении нет необходимости, т. к. в исходном механизме направляющую уже удерживает опора  $0$ . Перемещениям препятствуют избыточные связи. Их устраняют путём замены кинематических пар на более подвижные во взаимном движении звеньев пары.

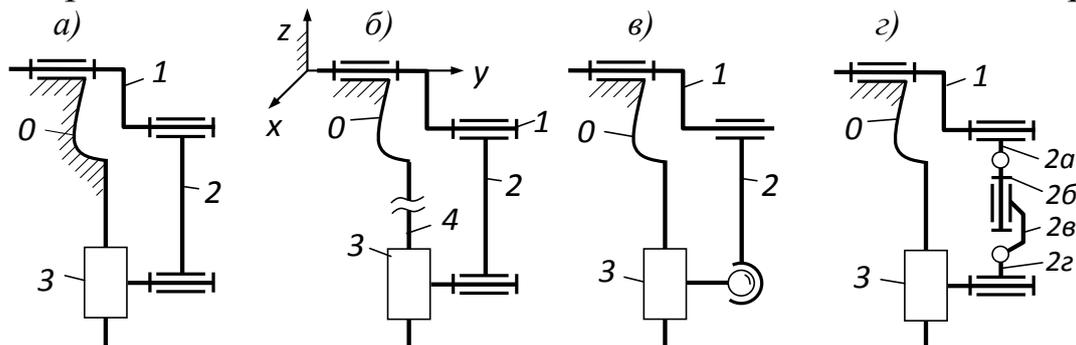


Рис. 3.6

При замене кинематических пар следят за тем, чтобы они предоставляли конечному звену разрезанной цепи необходимую свободу. Например, для того, чтобы направляющая  $4$  могла двигаться вдоль оси  $y$ , можно убрать осевую связь в паре  $1, 2$ . Удаление осевой связи превращает вращательную пару в цилиндрическую. Чтобы направляющая могла разворачиваться вокруг осей  $x$  и  $z$ , можно заменить вращательную пару  $2, 3$  на шаровую. В результате двух замен механизм принимает вид, показанный на рис. 3.6, в.

При желании оставить существующие пары без изменения избыточные связи усматривают в сечениях звеньев (в любом из них содержится шесть связей). Необходимую свободу направляющей предоставляют путём разрезания одного или нескольких звеньев на части с последующим подвижным соединением этих частей (это уменьшает число связей в сечении).

На рис. 3.6, *г* разрезан шатун, части шатуна соединены шарнирно. Число разрезов и ориентация шарниров выбраны так, чтобы направляющая могла перемещаться во всех недостающих направлениях.

### 3.4.2 Алгебраический метод

Этот метод основан на структурной формуле. Исходя из главного условия синтеза – отсутствия избыточных связей, в формулу подставляют  $q = 0$ . Затем задаются величинами  $w$  и  $n$ . Для упрощения задачи их принимают сначала такими, как в исходном механизме. Через принятые значения находят соответствующее им необходимое число связей  $s$ . Как следует из формулы (3.2),  $s_n = 6n - w$ .

Найденное  $s_n$  раскладывают всеми возможными, отличающимися по составу способами, на  $p$  кинематических пар синтезируемого механизма. Обсуждаемый механизм является одноконтурным. В таких механизмах число пар на единицу больше числа подвижных звеньев:  $p = n + 1$ .

Выбрав один из вариантов раскладки связей, строят механизм. Подставляя пары, следят за тем, чтобы механизм получился кинематически эквивалентным исходному и имел во всех своих положениях (фазах движения) заданное число степеней свободы.

Если хотя бы в одном положении число степеней свободы получилось другим, например на единицу больше заданного, то это значит, что одна из необходимых связей действует в этом положении не в том направлении, которое нужно механизму. В этом случае подставляемую пару необходимо переориентировать.

Если это не помогает, то можно попытаться переориентировать, а возможно и сместить, какую-нибудь другую пару. Если и это не помогает, то подставляемую пару заменяют другой с тем же числом связей. Подобрать и сориентировать пары с выбранными числами связей помогает метод деформации стойки: пары ориентируют так, чтобы все вместе они допускали любые деформации стойки.

**Пример.** Требуется построить все структурные варианты всё того же кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.6, *а*), удовлетворяющего условиям:  $q = 0$ ,  $w = 1$ ,  $n = 3$ . При этих условиях необходимое число связей

$$s_n = 6n - w = 6 \cdot 3 - 1 = 17.$$

Число кинематических пар  $p = n + 1 = 3 + 1 = 4$ . Семнадцать связей раскладываются по четырём кинематическим парам в сле-

дующих трёх вариантах:  $5+5+5+2$ ;  $5+5+4+3$ ;  $5+4+4+4$ . Все другие варианты являются перестановками найденных и реализуются в процессе построения схемы. Согласно первому варианту, одна из пар должна быть двухсвязной. Двухсвязными являются пары «цилиндр – плоскость» и «шар – цилиндр» (см. табл. 3.1). Подстановка пары «цилиндр – плоскость» взамен какой-либо вращательной пары, например 1, 2, возможна в нескольких вариантах, отличающихся ориентацией пары, два из этих вариантов приведены на (рис. 3.7, а, б). Полученные механизмы не удовлетворяют условиям синтеза, т. к. появляется вторая степень свободы –  $z_3$  и  $\varphi_{23}$  соответственно. Подстановка пары «цилиндр – плоскость» взамен поступательной пары 3, 4 возможна также в нескольких вариантах, два из них приведены на рис. 3.7, в, г.

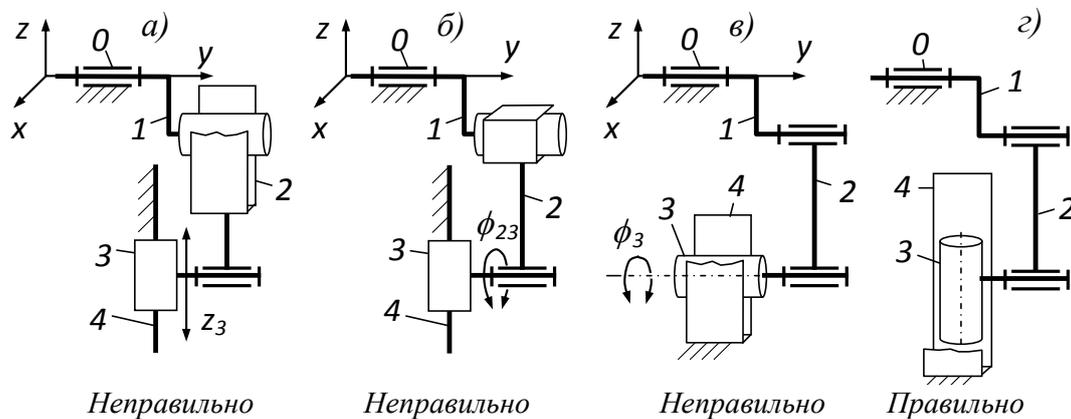


Рис. 3.7

В варианте в цепь 0...3 не позволяет звену 3 последовать за направляющей 4, если по каким-то причинам она будет развёрнута вокруг оси, параллельной  $z$ . В то же время эта цепь допускает вращение звена 3 вокруг оси  $y$  (см. угол  $\varphi_3$ ). Это вращение означает появление второй степени свободы, что противоречит условиям синтеза.

Вариант г допускает любые перемещения направляющей 4 и, значит, избыточных связей нет. Кроме того, исчезла вторая степень свободы. Таким образом, все условия синтеза удовлетворены. Приведённых примеров достаточно, чтобы оценить возможности пары «цилиндр – плоскость».

На рис. 3.8 показаны варианты подстановки пары «шар – цилиндр». Подстановка взамен любой вращательной пары сразу даёт правильный механизм (рис. 3.8, а).

Подстановка взамен поступательной пары даёт первоначально неудовлетворительный результат (рис. 3.8, б).

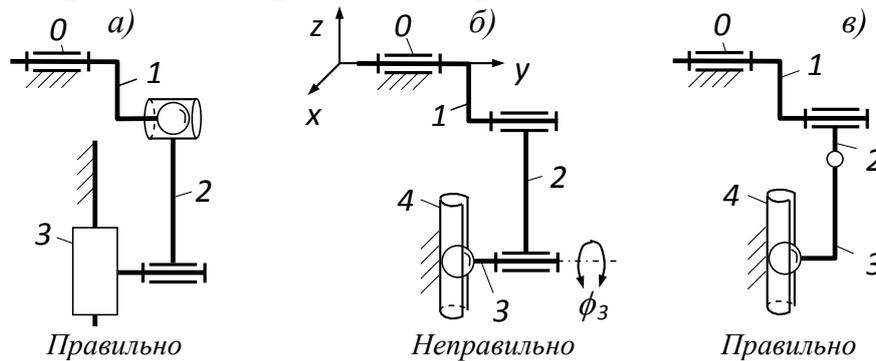


Рис. 3.8

Цепь  $0...4$  построенного механизма сопротивляется смещениям направляющей  $4$  по оси  $y$ . В то же время эта цепь не препятствует вращению  $\varphi_3$  звена  $3$  вокруг оси, параллельной  $y$ . Удовлетворить условиям синтеза можно только за счёт разворота и смещения шарнира, связывающего звенья  $2, 3$  (рис. 3.8, в).

Столь же богатые возможности для синтеза (и обсуждения ошибок) предоставляет набор связей  $5+5+4+3$ . При этом в качестве четырёхсвязной пары можно взять цилиндрическую, а в качестве трёхсвязной шаровую.

При подстановке, показанной на рис. 3.9, а, где всё расположено в одной плоскости, цепь  $0...4$  не допускает перемещения направляющей  $4$  по оси  $y$ . В то же время, цепь допускает развороты звена  $3$  на бесконечно малый угол  $d\varphi_3$  вокруг направляющей. Развороты на угол  $d\varphi_3$  – это пример бесконечно малой степени свободы, её необходимо учитывать наравне с прочими степенями свободы.

Чтобы устранить ненужную степень свободы и предоставить необходимую, ось цилиндрической пары следует расположить над или под центром шара, т. е. вне плоскости чертежа. Это решение можно показать только в проекции на плоскость  $xz$  (рис. 3.9, б). Для лучшего восприятия схемы звенья  $1, 2$  показаны на этой проекции с небольшим отклонением от вертикали.

Все три варианта раскладки связей –  $5+5+5+2$  и т. д. – получены из условия  $w = 1, n = 3$ . Задаваясь другими значениями этих величин, возможности синтеза значительно расширяют.

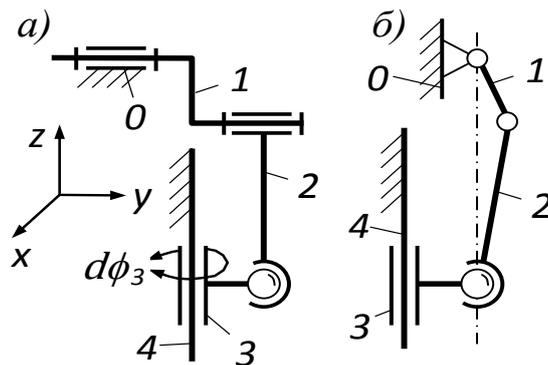


Рис. 3.9

Так, оставляя неизменным  $n$ , можно увеличить  $w$ , например до  $w = 2$ , это на единицу больше предыдущего. Тогда необходимое число связей составит  $s_n = 6n - w = 6 \cdot 3 - 2 = 16$ , число пар станет равным  $p = n + 1 = 3 + 1 = 4$ , возможные варианты раскладки связей будут такими:  $5+5+5+1$ ;  $5+5+4+2$ ;  $5+5+3+3$ ;  $5+4+4+3$ ;  $4+4+4+4$ . На рис. 3.10 показаны механизмы с наборами связей  $5+5+4+2$  и  $5+4+4+3$ .

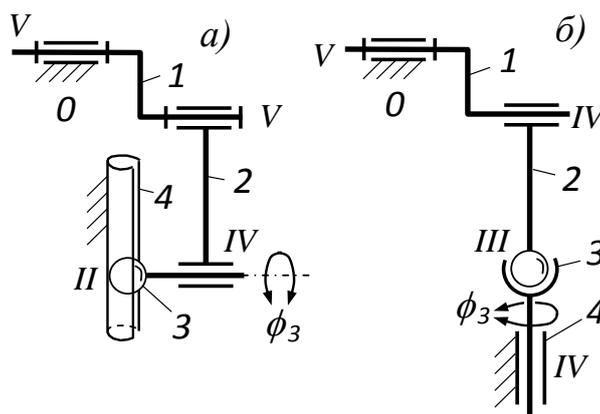


Рис. 3.10

Вторая степень свободы  $\varphi_3$  в этих механизмах представляет собой пример местной степени свободы, во многих случаях она безвредна и даже полезна.

В отличие от механизмов, показанных на рис. 3.8, б и рис. 3.9, а, цепь  $0...4$  на рис. 3.10 не сопротивляется каким-либо перемещениям направляющей 4, и, следовательно, избыточных связей нет.

Сохраняя  $w = 1$ , можно начать наращивать  $n$ . Пусть, сразу,  $n = 6$ , тогда:  $s_n = 6 \cdot 6 - 1 = 35$ ;  $p = 6 + 1 = 7$ . Тридцать пять связей раскладываются на семь кинематических пар единственным образом:  $5+5+5+5+5+5+5$ . Механизм, соответствующий этому набору, показан на рис. 3.6, з.

При  $n = 7$  получают:  $s_n = 6 \cdot 7 - 1 = 41$ ;  $p = 7 + 1 = 8$ . Если в каждую кинематическую пару положить максимальное число связей, т. е. пять, то из общего числа связей уйдёт  $5 \cdot 8 = 40$  связей. Одна связь окажется без места, следовательно, при  $n > 6$  задача не имеет решения.

### 3.5 Многоконтурные механизмы

Избыточные связи существуют только в замкнутых цепях звеньев или, как ещё говорят, в замкнутых контурах. Если исследуемый механизм образовывать наложением *простых* (не разветвлённых) цепей, то каждая такая цепь будет увеличивать число замкнутых контуров на единицу, и избыточные связи можно будет выявлять и устранять в каждой цепи отдельно. На рис. 3.11 показан механизм (вид *а*) и несколько способов образования его из простых цепей (виды *б*, *в*, *г*).

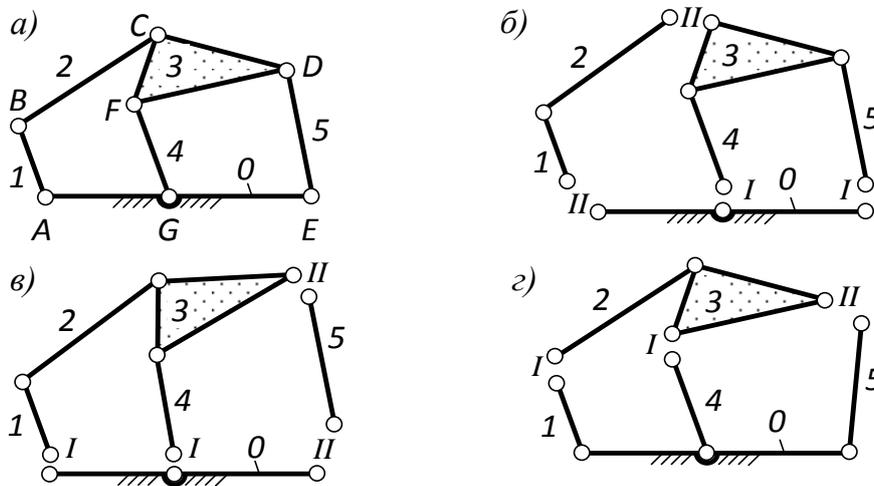


Рис. 3.11

На виде *б* начальным объектом является стойка. Первой присоединяется цепь 4, 3, 5, второй – цепь 1, 2. Римские цифры на рисунке указывают порядок замыкания кинематических пар.

На виде *в* первой присоединяется цепь 1, 2, 3, 4, второй – «цепь» 5. Пример показывает, что допускаются цепи, состоящие из одного звена.

На виде  $z$  начальный объект состоит из стойки и звеньев  $1, 4, 5$ . Первой присоединяется цепь  $2, 3$ , но только к звеньям  $1, 4$ . Во вторую очередь замыкается пара  $3, 5$ . Пара  $3, 5$  образует *пустую* цепь.

Присоединяемая цепь не может изменить количества избыточных связей в механизме, предшествующем присоединению цепи (далее, просто, *предшествующем*). На этом основании избыточные связи усматривают во внешних и внутренних парах присоединяемой цепи.

### 3.5.1 Структурная формула присоединяемой цепи механизма

Пусть механизм образуется по способу, показанному на рис. 3.11, б. Все пары механизма вращательные, пятисвязные. После присоединения первой цепи образуется механизм  $0, 4, 3, 5$  с числом избыточных связей

$$q_{m1} = w_{m1} + s_{m1} - 6n_{m1} = 1 + 20 - 6 \cdot 3 = 3.$$

После присоединения второй цепи образуется механизм (см. рис. 3.11, а) с числом избыточных связей

$$q_{m2} = w_{m2} + s_{m2} - 6n_{m2} = 1 + 35 - 6 \cdot 5 = 6.$$

Число избыточных связей, вносимых второй цепью, есть разность  $(q_{m2} - q_{m1})$ . После подстановок и группирования разность принимает вид:

$$(q_{m2} - q_{m1}) = (w_{m2} - w_{m1}) + (s_{m2} - s_{m1}) - 6(n_{m2} - n_{m1}).$$

Разности, стоящие в скобках, представляют собой приращения, обусловленные присоединением второй цепи. Распространяя полученный результат на случай  $i$ -й цепи, получают:

$$\Delta q_i = \Delta w_i + \Delta s_i - 6 \Delta n_i. \quad (3.4)$$

Это и есть структурная формула присоединяемой цепи механизма – структурная *формула в приращениях*. Точнее, это формула числа избыточных связей присоединяемой цепи.

Символы приращений загромождают формулу. Избавиться от этих символов позволяет выражение приращений через абсолютные параметры цепи. Как следует из выше изложенного, приращение  $\Delta q_i$  – это число избыточных связей  $q_i$ , вносимых  $i$ -й цепью. Приращения  $\Delta n_i$  и  $\Delta s_i$  совпадают, соответственно, с числом звеньев  $n_i$  и числом связей  $s_i$  во внешних и внутренних парах  $i$ -й цепи. Приращение числа степеней свободы, вызванное присоединением  $i$ -й цепи, представимо в виде

$$\Delta w_i = w_i^r - w_i^s, \quad (3.5)$$

где  $w_i^r$  – число степеней свободы  $i$ -й цепи относительно предшествующего механизма (превращённого в одно твёрдое тело);  $w_i^s$  – число степеней свободы, отнятое цепью, у предшествующего механизма. Первое из этих чисел называется далее относительным, второе – изымающим (индекс  $s$  происходит от англ. *subtract* – отнимать, вычитать).

После выражения всех приращений через абсолютные параметры число избыточных связей, вносимых  $i$ -й цепью,

$$q_i = w_i^r - w_i^s + s_i - 6n_i \quad (3.6)$$

Это – структурная формула цепи в абсолютных параметрах. Ниже показано применение формулы для всех трёх вариантов образования механизма (рис. 3.11, б, в, г). При этом принимается во внимание, что у цепи, присоединяемой к стойке, изымающее число степеней свободы равно нулю, т. к. изымать нечего, а у пустой цепи равно нулю относительное число степеней свободы, т. к. цепь не содержит звеньев.

В примере б:  $q_1 = 1 - 0 + 20 - 6 \cdot 3 = 3$ ;  $q_2 = 0 - 0 + 15 - 6 \cdot 2 = 3$ .

В примере в:  $q_1 = 2 - 0 + 25 - 6 \cdot 3 = 3$ ;  $q_2 = 0 - 1 + 10 - 6 \cdot 1 = 3$ .

В примере г:  $q_1 = 0 - 0 + 15 - 6 \cdot 2 = 3$ ;  $q_2 = 0 - 2 + 5 - 6 \cdot 0 = 3$ .

Сумма  $q_1 + q_2$  везде равна шести, что совпадает с  $q_{m2}$  и свидетельствует о правильности формулы (3.6). Во многих случаях оказывается удобной *структурная формула в смешанном виде*:

$$q_i = \Delta w_i + s_i - 6n_i. \quad (3.7)$$

### 3.5.2 Устранение избыточных связей в многоконтурных механизмах

Избыточные связи устраняют по цепям в порядке их присоединения. Как и при синтезе одноконтурных механизмов, для синтезируемой цепи задаются величинами  $q_i$ ,  $n_i$  и  $\Delta w_i$ . Выбор  $\Delta w_i$  подчиняют уравнению

$$w_0 + \Delta w_1 + \Delta w_2 + \dots + \Delta w_n = w, \quad (3.8)$$

где  $w_0$  и  $w$  – число степеней свободы начального и конечного объекта соответственно. Конечным объектом является механизм в целом, начальным – стойка или что-то более сложное, не содержащее замкнутых цепей звеньев. Если начальным объектом

является стойка, то  $w_0 = 0$ . По принятым значениям структурных параметров определяют необходимое число связей

$$s_i = 6n_i - \Delta w_i + q_i.$$

Найденное  $s_i$  раскладывают по  $p_i = n_i + 1$  кинематическим парам. В соответствии с одним из вариантов раскладки связей строят цепь.

**Пример.** Требуется устранить избыточные связи в механизме (рис. 3.11, а), образованном, как показано на рис. 3.11, б.

Исходя из главного условия синтеза, принимают:  $q_1 = 0, q_2 = 0$ . Числа звеньев в цепях оставляют сначала прежними:  $n_1 = 3, n_2 = 2$ . Принимая  $\Delta w_1 = 1, w = 1$ , по уравнению (3.8) находят:  $\Delta w_2 = w - w_0 - \Delta w_1 = 1 - 0 - 1 = 0$ . При этих числах получают:  $s_1 = 6n_1 - \Delta w_1 = 6 \cdot 3 - 1 = 17; p_1 = n_1 + 1 = 3 + 1 = 4$ .

Варианты раскладки семнадцати связей по четырём кинематическим парам известны из предыдущих примеров. Пусть принят вариант  $5+5+4+3$ , тогда цепь 4, 3, 5 может быть построена, как показано на рис. 3.12.

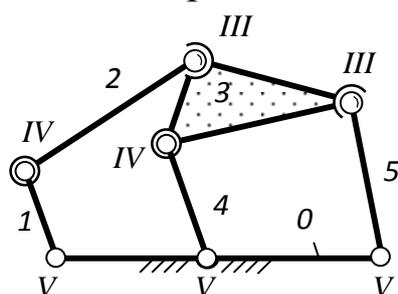


Рис. 3.12

Для цепи 1, 2:

$$s_2 = 6n_2 - \Delta w_2 = 6 \cdot 2 - 0 = 12;$$

$$p_2 = n_2 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Двенадцать связей раскладываются по трём кинематическим парам в трёх вариантах:  $5+5+2; 5+4+3; 4+4+4$ . Принимая вариант  $5+4+3$ , цепь 1, 2 можно построить, как показано на том же рисунке.

## 3.6 Структура двумерных моделей механизмов

### 3.6.1 Связи кинематических пар

Дана двумерная модель кулачкового механизма с тарельчатым толкателем (рис. 3.13, а). Механизм интересен тем, что содержит кинематические пары почти всех видов, встречающихся в двумерных моделях.

В паре 1, 2 звенья касаются друг друга в одной точке и, следовательно, имеют одну активную связь между собой. Во вращательной паре 0, 1 и поступательной паре 0, 2 (рис. 3.13, б) необходимо и достаточно иметь по две точки касания – А, В и С, D соответственно, следовательно, в каждой из этих пар содержится по две активные связи.

Звенья двумерной модели обязаны оставаться в своём двумерном пространстве (на рисунке – в плоскости  $xu$ ) даже после удаления всех связей между ними. В таком случае каждое звено обладает тремя степенями свободы относительно любого другого.

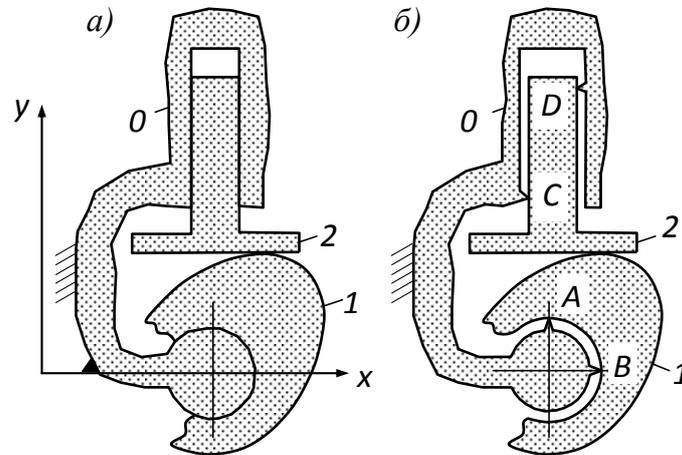


Рис. 3.13

Каждая из  $s$  активных связей пары  $i, j$  отнимает у звена  $i$  одну из этих трёх степеней свободы относительно звена  $j$ , поэтому оставшееся число степеней свободы  $w$  и отнятое, равное  $s$ , подчинены уравнению

$$w + s = 3. \quad (3.9)$$

Из трёх степеней свободы, уничтожаемых связями, должна остаться хотя бы одна, поэтому в кинематической паре двумерной модели механизма максимальное число связей  $s_{\max} = 2$ .

### 3.6.2 Связи пар, избыточные для механизма

Как и в трёхмерных моделях, в общем случае активные связи пар двумерных моделей могут быть поделены на активные и пассивные для механизма. Активные считаются необходимыми, пассивные – избыточными. Деление связей на активные и пассивные демонстрируется ниже на примере двумерной модели клинового механизма (рис. 3.14, а).

Число степеней свободы механизма равно единице. Это число определяет, например, координата  $x$ . Очистив все пары от собственных пассивных связей, получают схему с тем же числом степеней свободы (рис. 3.14, б).

Связи в точках  $A, B, C$  и т. д. являются активными для пар. Всего таких связей шесть. Удаление связи, например, в точке  $F$  даёт механизм с прежним числом степеней свободы (рис. 3.14, в).

Значит, связь в точке  $F$  избыточная. Удаление ещё одной связи привело бы к увеличению числа степеней свободы, следовательно, оставшиеся пять связей – необходимые.

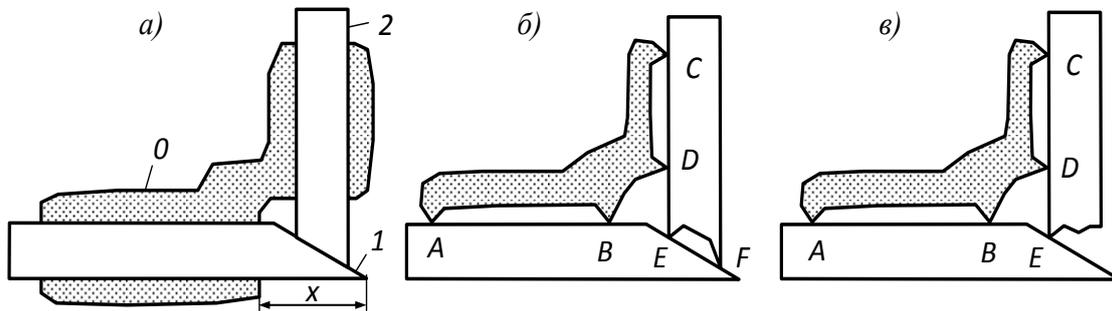


Рис. 3.14

### 3.6.3 Структурные формулы

Структурная формула двумерной модели механизма выводится так же, как и для трёхмерной модели. Разница состоит лишь в том, что после удаления всех связей освободившиеся звенья обладают не  $6n$ , а  $3n$  степенями свободы. В результате:

$$w + s - q = 3n. \quad (3.10)$$

Из этого уравнения следует, что в двумерной модели механизма число избыточных связей

$$q = w + s - 3n. \quad (3.11)$$

В кулачковом механизме (рис. 3.13)  $q = 1 + 5 - 3 \cdot 2 = 0$ . В клиновом механизме (рис. 3.14,  $a$ )  $q = 1 + 6 - 3 \cdot 2 = 1$ , что совпадает с числом  $q$ , найденным путём пробного удаления.

Для произвольной цепи многоконтурного механизма формула числа избыточных связей имеет вид, аналогичный (3.6), отличаются лишь коэффициенты при  $n_i$ :

$$q_i = w_i^r - w_i^s + s_i - 3 \cdot n_i. \quad (3.12)$$

## 4 Рычажные механизмы

### 4.1 Графические методы кинематического анализа и синтеза

#### 4.1.1 Определение положений звеньев

Дана схема механизма, вычерченная в определённом масштабе (рис. 4.1, а). Требуется построить эту схему при некотором новом значении  $\varphi'$  угла  $\varphi$ , характеризующего положение звена 1.

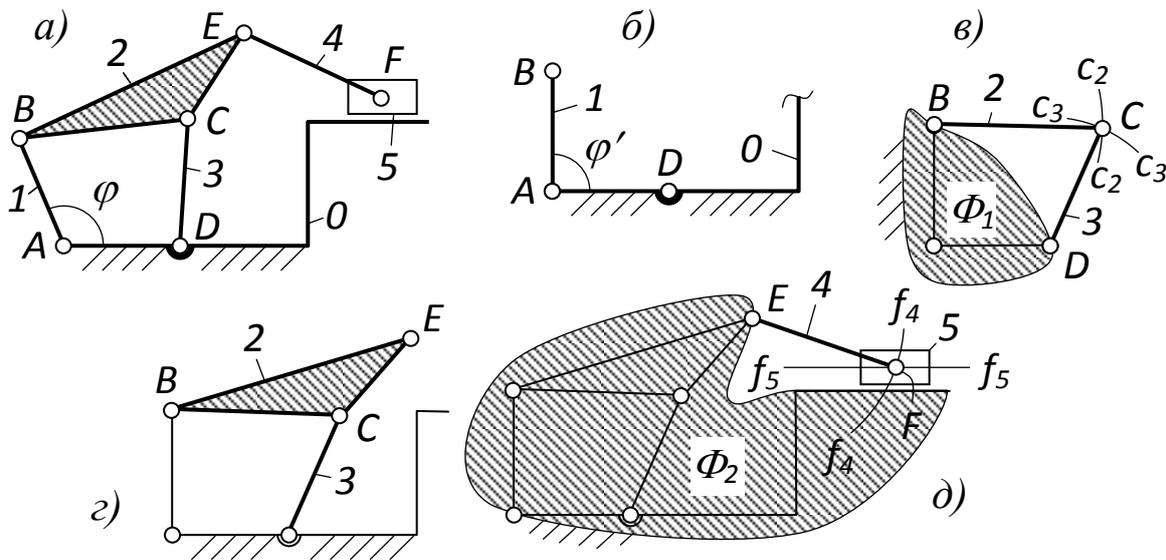


Рис. 4.1

Построение схемы начинают с изображения звеньев 0, 1 под углом  $\varphi'$  (рис. 4.1, б). Размеры звеньев копируют с рис. 4.1, а.

Звено 1 с задаваемым положением называют *начальным*. Соответственно и весь механизм 0, 1, построенный на данном этапе, называют *начальным механизмом*, хотя это всего лишь зародыш механизма.

Чтобы решить, какие звенья пристроить к начальному механизму в первую очередь, воображают, что механизм собирается из разрозненных звеньев, причём начальный механизм уже собран и угол  $\varphi'$  «заморожен». В результате замораживания начальный механизм превращается в одно твёрдое тело  $\Phi_1$  (рис. 4.1, в).

После такого превращения звенья 2, 3 разъединяют в точке С. Вращая эти звенья вокруг точек В и D, находят, что траектории свободных концов звеньев представляют собой дуги окружностей

$c_2-c_2$  и  $c_3-c_3$ , проведённых из центров вращения. На пересечении траекторий отмечают точку  $C$ . Точку  $C$  соединяют с точками  $B$  и  $D$ , в результате находят положение звена 3 и одной стороны звена 2.

Траектории  $c_2-c_2$  и  $c_3-c_3$  представляют собой геометрические места точек  $C_2$  и  $C_3$ , поэтому метод определения положения точки  $C$  называют методом *геометрических мест*. Этот метод называют также методом засечек.

Положение точки  $E$  и других сторон звена 2 (рис. 4.1,  $z$ ) находят, снимая размеры этого звена с рис. 4.1,  $a$ . На этом построение цепи 2, 3 завершено.

После цепи 2, 3 становится возможным определение положения цепи 4, 5 (рис. 4.1,  $d$ ). Для этого всё ранее построенное превращают в одно твёрдое тело  $\Phi_2$ . Звенья 4, 5 разъединяют в точке  $F$ . Вращая звено 4 вокруг точки  $E$  и перемещая ползун 5 по направляющей, строят траектории  $f_4-f_4$  и  $f_5-f_5$  точек  $F_4, F_5$ . На пересечении траекторий находят положение шарнира  $F$ . Соединяя точки  $E$  и  $F$ , получают положение звена 4. Положение звена 5 определяет точка  $F$ . На этом задача определения положений всех звеньев решена.

Если построение схемы начинать со звена 3 (см. рис. 4.1,  $a$ ), то порядок построения будет следующим:  $0, 3 + 1, 2 + 4, 5$ . При этом в методике решения задачи не будет ничего нового.

При построении схемы по заданному положению звена 5 или, иначе, по координате  $S$  (рис. 4.2,  $a$ ), не удастся найти ни одной двухзвенной цепи, положение которой было бы определимо. Определить положение можно лишь вовлекая в построения все оставшиеся звенья. Это делается следующим образом.

Звено 5 устанавливают на заданное расстояние  $S'$  (рис. 4.2,  $b$ ). Звено 2 (треугольное) отсоединяют от звеньев 1, 3, 4. Изображают траектории  $b_1-b_1, c_3-c_3, e_4-e_4$  освободившихся концов этих звеньев. Звено 2 помещают какими-либо двумя вершинами на свои траектории, например  $c_3-c_3$  и  $e_4-e_4$ , и, скользя по ним, получают траекторию  $b_2-b_2$  третьей вершины. На пересечении траекторий  $b_1-b_1$  и  $b_2-b_2$  располагают шарнир  $B$ . Соединяя шарниры  $A$  и  $B$ , находят положение звена 1. По положению звена 1 определяют положение звеньев 2, 3 и 4, 5. Это делают уже известным способом, рассмотренным выше.

Если для каждого момента времени определимо положение цепи, то определимы скорости, ускорения и любые другие характеристики движения. На этом основании цепи, положение которых определимо на каждом данном этапе построения схемы, называются далее *кинематически определяемыми*.

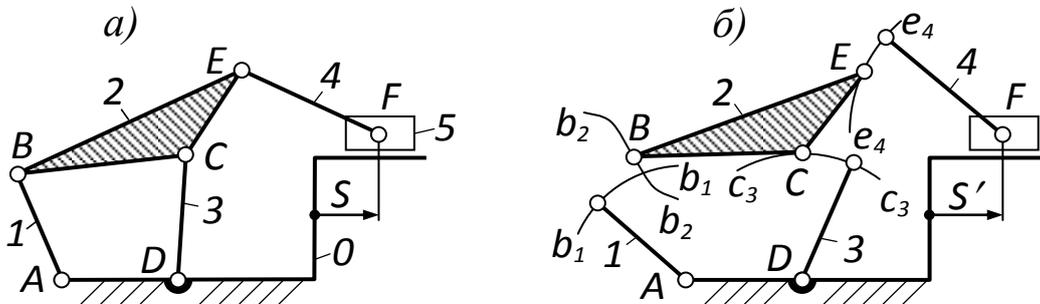


Рис. 4.2

Первые закономерности строения кинематически определяемых цепей звеньев нашёл в начале прошлого столетия петербургский профессор Леонид Владимирович Ассур. В его честь кинематически определяемые цепи назвали цепями или *группами Ассура*.

#### 4.1.2 Группы Ассура

Чтобы выявить количественные характеристики своих групп, Ассур предложил рассматривать их как надстоечную часть особого механизма, стойкой которого является предшествующий механизм, превращённый в одно твёрдое тело. Для цепи 2, 3 (см. рис. 4.1) – это тело  $\Phi_1$ , для цепи 4, 5 – тело  $\Phi_2$ .

У надстоечной части число степеней свободы  $w = 0$ . Подставляя это число в структурную формулу двумерной модели механизма ( $w + s - q = 3n$ ), и, ограничиваясь механизмами, не содержащими избыточных связей (у них  $q = 0$ ), Ассур получил:  $s = 3n$ .

Двумерные модели рычажных механизмов содержат только вращательные и поступательные кинематические пары. Все они двухсвязные, поэтому общее число связей представимо в виде  $s = 2p_2$ , где  $p_2$  – количество кинематических пар с двумя связями. С учётом всех допущений получают:  $2p_2 = 3n$ . Отсюда  $p_2 = 3n/2$ .

Таким должно быть соотношение между числом звеньев и числом двухсвязных кинематических пар в группах Ассура. Последнему уравнению удовлетворяют лишь чётные  $n$ , т. к.  $p_2$  может

быть только целым. Соглашаясь на это, получают следующую таблицу структурных параметров групп Ассура:

$n$	2	4	6	8	...
$p_2$	3	6	9	12	...

Чисто шарнирные варианты или, иначе, *основные модификации* двухзвенных и четырёхзвенных групп, построенных в соответствии с таблицей, показаны на рис. 4.3.

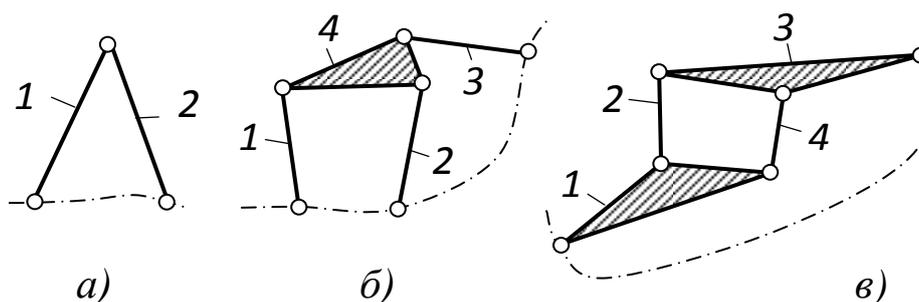


Рис. 4.3

За штрихпунктирной линией скрыт механизм, предшествующий присоединению группы Ассура. Группы *a*, *б*, *в* отнесены ко второму, третьему и четвёртому классам, соответственно. Группа *a* называется двухповодковой, группа *б* – трёхповодковой. Поводками в группе *б* называются звенья 1, 2, 3, звено 4 называется базовым.

Прочие модификации групп Ассура любого класса получают последовательной заменой вращательных пар поступательными. На рис. 4.4 изображены все модификации группы первого класса, двухповодковой.

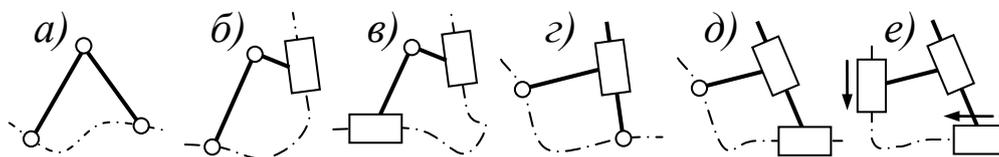


Рис. 4.4

Последняя модификация (рис. 4.4, *e*) не обладает определённым положением относительно предшествующего механизма (стрелки показывают направление возможного движения звеньев). Это вырожденная группа Ассура.

При определённой геометрии вырожденной может оказаться любая другая группа, но последняя остаётся вырожденной всегда. Механизмы, содержащие вырожденные группы Ассур, в данном курсе не рассматриваются.

На рис. 4.5 показаны некоторые модификации трёхповодковой группы Ассур.

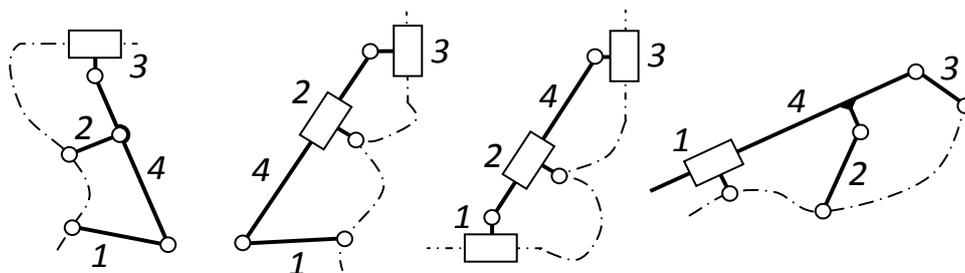


Рис. 4.5

Во всех модификациях звено 4 – базовое, 1, 2, 3 – поводки. Нет необходимости запоминать все модификации групп Ассур, достаточно помнить только основные, показанные на рис. 4.3.

Параллельный перенос оси поступательной пары не влияет на кинематику группы Ассур, но существенно меняет её очертания. Например, группа, изображённая на рис. 4.4, б, может иметь форму группы 4, 5, изображённой на рис. 4.1, д. Это следует иметь в виду при разложении механизма на группы Ассур.

Определимость положения групп Ассур означает одновременно определимость всех других кинематических характеристик этих групп, например, скоростей и ускорений. Методы определения скоростей и ускорений в часто встречающихся группах Ассур хорошо разработаны, поэтому после разложения механизма на группы Ассур его кинематический анализ перестаёт быть проблемой.

Чтобы разложить на группы Ассур зубчатый или кулачковый механизм, его высшие пары заменяют кинематически эквивалентными цепями, содержащими только низшие пары.

#### 4.1.3 Замена высших пар

Чтобы произвести замену в зубчатом механизме (рис. 4.6, а), через точку касания профилей зубьев (элементов высшей пары) проводят к ним нормаль  $n-n$ . Отмечают центры кривизны  $C$ ,  $D$  профилей. Вводят звено 3, соединяя его шарнирно в точках  $C$  и  $D$  со

звеньями  $1, 2$ . Последние урезают до толщины линии и получают заменяющий механизм  $ACDB$ , не содержащий высших пар.

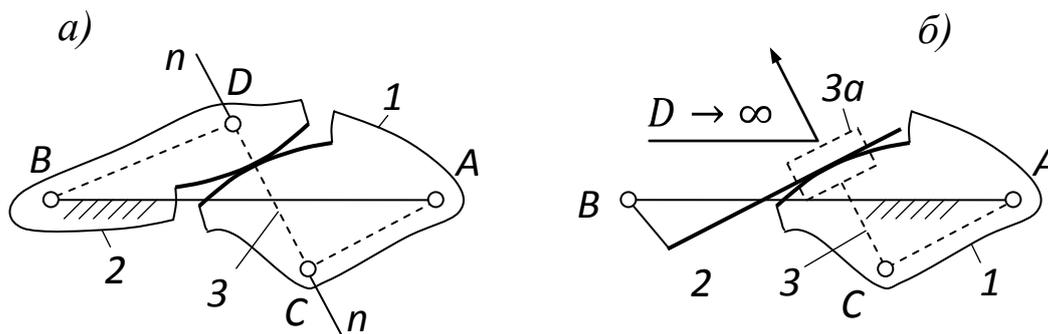


Рис. 4.6

Если один из элементов высшей пары прямолинейный (рис. 4.6, б), то шарнир  $D$  устремляется по нормали в бесконечность. Вращательное движение звена  $CD$  относительно звена  $2$  превращается в поступательное, направленное вдоль прямолинейного элемента звена  $2$ . На этом основании конец  $D$  звена  $3$  заменяют ползуном  $3$ .

Заменяющий механизм кинематически эквивалентен заменяемому до производных второго порядка. Это значит, что с его помощью можно правильно определять только скорости и ускорения.

#### 4.1.4 Определение скоростей и ускорений

Универсальным методом решения данной задачи является план скоростей и ускорений, известный из курса теоретической механики. Как и положения звеньев, скорости и ускорения определяют переходя от одной группы Ассур к другой. При этом начальным считают звено с заданной скоростью и ускорением. Обычно это то же звено, что и в задаче о положениях.

##### 4.1.4.1 Группа Ассур с тремя вращательными парами

Пусть исследуемый механизм имеет схему, показанную на рис. 4.7, а. Схема вычерчена в определённом масштабе. Для изображённого положения заданы скорость  $\omega_1$  и ускорение  $\varepsilon_1$  звена  $1$ . Требуется определить скорости и ускорения всех шарнирных точек, а также угловые скорости и ускорения всех звеньев.

При заданном движении звена  $1$  первую группу Ассур образует цепь  $2, 3$ , вторую – цепь  $4, 5$ . Это группы с тремя вращательными

парами. Анализ начинается с цепи 2, 3. В результате анализа определяют скорости и ускорения точек  $B$ ,  $C$ , а также угловые скорости и ускорения звеньев 2, 3.

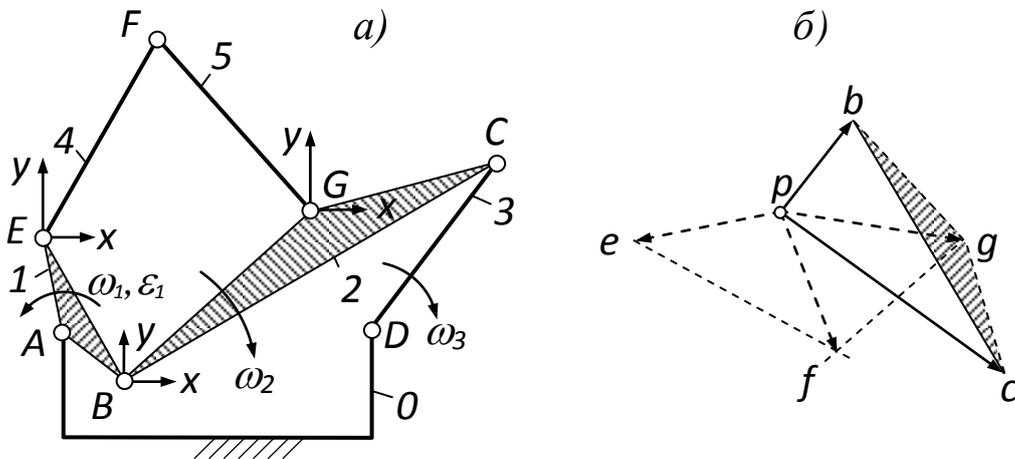


Рис. 4.7

Скорости точек  $B$  и  $C$ . Скорость точки  $B$  определяют по формуле  $v_B = \omega_1 l_{AB}$ . Всё необходимое для вычисления этой скорости есть. Для определения скорости точки  $C$  вводят систему координат  $Bxu$ , движущуюся поступательно. Эту систему принимают за носитель (переносчик) звена 2, т. е. считают, что абсолютное движение звена 2 (движение относительно стойки) состоит из поступательного вместе с системой  $Bxu$  и вращательного относительно этой системы. Из такого представления (разложения) движения получают уравнение:

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

$$\perp CD \quad \perp AB \quad \perp CB$$

Под уравнением указана ориентация каждого вектора по отношению к звеньям механизма.

**Примечание.** Второе слагаемое уравнения читается как скорость точки  $C$  относительно  $B$ , хотя в действительности это скорость точки  $C$  относительно системы  $Bxu$ . Скорость точки  $C$  относительно  $B$  равна нулю, т. к. расстояние между этими точками постоянно.

Графическое решение уравнения скорости точки  $C$  называется планом скоростей. Чтобы его построить, из произвольной точки  $p$ , называемой полюсом плана скоростей, проводят вектор  $pb$ , изображающий скорость точки  $B$  (рис. 4.7, б). Длину вектора выбирают произвольно. По формуле  $\mu_v = v_B / pb$  вычисляют масштабный

коэффициент плана скоростей. Через точку  $b$  проводят линию действия вектора  $v_{CB}$ . Искомая сумма выходит из полюса и идёт до упора в линию  $v_{CB}$ . По формуле  $v = \mu_v v$  вычисляют истинные значения скоростей  $v_C$  и  $v_{CB}$ .

Угловые скорости звеньев 2, 3. Система координат  $Bxy$  движется поступательно. Ось  $x$  этой системы все время параллельна стойке. За любой промежуток времени звено 2 поворачивается относительно системы  $Bxy$  и относительно стойки на один и тот же угол. Из этого следует, что абсолютная угловая скорость звена 2 равна относительной:  $\omega_2 = \omega_2^{Bxy}$ . В свою очередь  $\omega_2^{Bxy} = v_{CB}/l_{CB}$ . Направление скорости  $\omega_2^{Bxy}$  указывает вектор  $bc$ , изображающий скорость  $v_{CB}$ . Первая буква в обозначении  $bc$  указывает начало вектора. Перенесённый по принадлежности в точку  $C$ , вектор  $bc$  «вращает» звено 2 вокруг точки  $B$  по часовой стрелке, сюда и направлена скорость  $\omega_2$ .

Скорость звена 3 вычисляют по формуле  $\omega_3 = v_C/l_{CD}$ . Направление скорости  $\omega_3$  определяют переносом в точку  $C$  вектора  $pc$ , изображающего скорость  $v_C$ .

Скорости мест присоединения цепи 4, 5. Местами присоединения являются точки  $E, G$ . На данный момент звенья 1, 2, к которым присоединяется группа, содержат по две точки с известными скоростями, это точки  $A, B$  на звене 1 и  $B, C$  на звене 2. Когда известны скорости двух точек какого-либо звена, скорость третьей точки определяют по теореме подобия, известной из теоретической механики. Теорема гласит: «Точки звена и концы абсолютных скоростей этих точек на плане скоростей образуют геометрически подобные и сходственно расположенные фигуры». Сходственность расположения означает одинаковость взаимного положения точек.

Прежде чем применять теорему к звену 1, необходимо указать на плане конец скорости точки  $A$ . Все абсолютные скорости на плане выходят из его полюса. Скорость точки  $A$  равна нулю, следовательно, конец вектора этой скорости находится в той же точке, где и начало, т. е. в полюсе. Имея это в виду, на стороне  $pb$

плана строят треугольник  $pbe$  (читай  $abe$ ), подобный треугольнику  $ABE$  на схеме механизма.

Примечание. Для лучшей читаемости плана скоростей всё построенное на данном и последующих этапах выделено пунктирными линиями.

Из двух возможных треугольников, подобных  $ABE$ , выбирают сходственно расположенный. Сходственность расположения можно обеспечить, ориентируясь, например, на положение точки  $E$  по отношению к стороне  $BA$ : при наблюдении из точки  $B$  точка  $E$  находится справа от прямой  $BA$ , такое же положение должна занимать точка  $e$  по отношению к прямой  $bp$ , если смотреть из точки  $b$ .

Переходя к звену 2, определяют скорость точки  $G$ . Для этого на стороне  $bc$  плана скоростей строят треугольник  $bcs$ , подобный и сходственно расположенный треугольнику  $BCG$ . Проблема сходственности решается здесь аналогично рассмотренной выше.

Скорость точки  $F$ . С местами присоединения цепи 4, 5 связывают системы координат  $Eху$  и  $Gху$ , движущиеся поступательно (см. рис. 4.7, *a*). Эти системы принимают за несущие для звеньев 4 и 5, соответственно. Говоря более подробно, считается, что движение звена 4 состоит из поступательного вместе с системой  $Vху$  и вращательного относительно этой системы. Аналогично раскладывается движение звена 5. Из принятых разложений движения вытекает система уравнений:

$$\begin{aligned} v_F &= v_E + v_{FE}; \\ v_F &= v_G + v_{FG}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В этой системе  $v_{FE}$  есть скорость точки  $F$  относительно системы координат  $Vху$  и, следовательно,  $v_{FE} \perp FE$ . Аналогично,  $v_{FG} \perp FG$ . Чтобы решить систему уравнений, из полюса  $p$  (см. рис. 4.7, *b*) выстраивают две цепи векторов, стоящих в правой части уравнений. Первые слагаемые  $v_E, v_G$  обоих уравнений уже построены. Остаётся провести через их концы  $e, g$  линии действия вторых слагаемых  $v_{FE}, v_{FG}$ . Искомая сумма  $v_F$  начинается в полюсе  $p$  и заканчивается в точке пересечения  $f$  линий действия вторых слагаемых.

На этом определение всех линейных скоростей закончено. Угловые скорости звеньев 4, 5 определяют так же, как для звена 2.

Ускорения точек  $B$  и  $C$  (рис. 4.8,  $a$ ). Ускорение точки  $B$  определяют непосредственно по исходным данным:  $a_B^n = \omega_1^2 l_{AB}$ ;  $a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{AB}$ ;  $a_B = a_B^n + a_B^\tau$ .

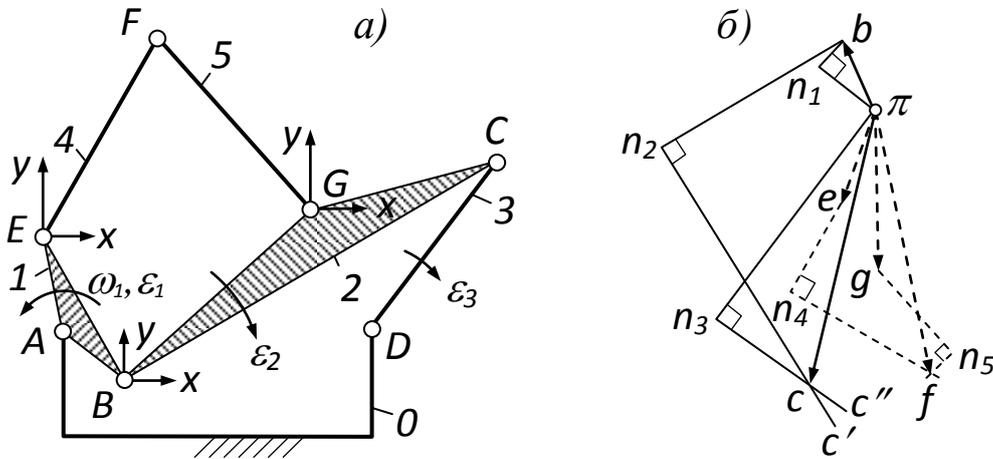


Рис. 4.8

Для определения ускорения точки  $C$  составляют два уравнения:

$$\begin{aligned} a_C &= a_B^n + a_B^\tau + a_{CB}^n + a_{CB}^\tau; \\ a_C &= a_C^n + a_C^\tau. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Первое вытекает из разложения движения звена 2 на поступательное с системой  $Vxy$  и вращательное относительно этой системы. Второе есть результат разложения ускорения точки  $C$  на нормальную и тангенциальную составляющие. В первом уравнении отсутствует ускорение Кориолиса. Это объясняется поступательным движением системы  $Vxy$ .

Недостающие нормальные составляющие в обоих уравнениях определяют по формулам:  $a_{CB}^n = v_{CB}^2/l_{CB}$ ;  $a_C^n = v_C^2/l_{CB}$ . Направление этих составляющих – к центру кривизны соответствующей траектории. Так, составляющая  $a_{CB}^n$  направлена от точки  $C$  к точке  $B$ , составляющая  $a_C^n$  – от точки  $C$  к  $D$ . Тангенциальные составляющие перпендикулярны нормальным, но неизвестны по величине. Однако всего этого достаточно для решения системы (4.2).

Как и в случае скоростей, из полюса  $\pi$  (рис. 4.8,  $b$ ) выстраивают две цепи векторов, стоящих в правой части обоих уравнений системы. Этим цепям соответствуют ломаные  $\pi n_1 b n_2 c'$  и  $\pi n_3 c''$ , соответственно. Результирующий вектор проводят из полюса в точку пересечения с последних слагаемых системы.

Буквой  $n$  с цифровым индексом обозначены концы нормальных составляющих ускорений. Так,  $n_1, n_2, n_3$  – это концы составляющих  $a_B^n, a_{CB}^n, a_C^n$ , соответственно. Под прямым углом к нормальным составляющим располагаются тангенциальные. На взаимную перпендикулярность указывают знаки прямого угла, расположенные при каждой точке  $n$ .

**М а с ш т а б ы .** Проведя вектор  $\pi n_1$ , сразу же определяют масштабный коэффициент плана ускорений:  $\mu_a = a_B^n / \pi n_1$ . Длины отрезков, изображающих  $a_B^t$  и другие вычисленные выше ускорения, определяют по формуле  $a = a / \mu_a$ . Истинное значение любого ускорения, найденного из построений, находят по обратной формуле:  $a = \mu_a a$ .

**У г л о в ы е у с к о р е н и я .** Как и в случае угловых скоростей, абсолютное ускорение звена 2 равно относительному:  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{Bxy}$ . В свою очередь,  $\varepsilon_2^{Bxy} = a_{CB}^t / l_{CB}$ . Направление ускорения  $\varepsilon_2^{Bxy}$  определяет вектор  $n_2c$ , изображающий ускорение  $a_{CB}^t$ . Перенесённый по принадлежности в точку  $C$ , он «вращает» звено 2 по часовой стрелке, сюда и направлено ускорение  $\varepsilon_2$ .

Для звена 3 угловое ускорение  $\varepsilon_3 = a_C^t / l_{CD}$ . Направление этого ускорения определяет вектор  $n_3c$ , изображающий ускорение  $a_C^t$ . Перенесённый по принадлежности в точку  $C$ , он «вращает» звено 3 по часовой стрелке, сюда и направлено ускорение  $\varepsilon_3$ . На этом определение ускорений в цепи 2, 3 завершено.

**У с к о р е н и я м е с т п р и с о е д и н е н и я  $E, G$  ц е п и 4, 5.** Их определяют по теореме подобия, которая справедлива и для ускорений. Так, для определения ускорения точки  $E$  строят треугольник  $bpe$ , подобный треугольнику  $BAE$ . Ускорение точки  $G$  определяют построением треугольника  $bsg$ , подобного и сходственно расположенного с треугольником  $BSG$ . Чтобы не перегружать рисунок, стороны треугольника  $bsg$  не показаны, но отмечены его вершины.

**П р и м е ч а н и е .** Как и в случае плана скоростей, для лучшей читаемости плана ускорений всё построенное на данном и последующих этапах выделено пунктиром.

Ускорение точки  $F$ . Уравнения ускорений этой точки составляют на основе тех же разложений движения, что и при определении скоростей:

$$\begin{aligned} a_F &= a_E + a_{FE}^n + a_{FE}^\tau; \\ a_F &= a_G + a_{FG}^n + a_{FG}^\tau. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Нормальные составляющие относительных ускорений определяют по формулам:  $a_{FE}^n = v_{FE}^2/l_{FE}$ ;  $a_{FG}^n = v_{FG}^2/l_{FG}$ . Входящие сюда относительные скорости берут из плана скоростей. Ускорение Кориолиса в обоих уравнениях равно нулю, т. к. носители звеньев 4, 5 движутся поступательно. Чтобы решить систему (4.3), из полюса  $\pi$  выстраивают две цепи векторов, стоящих в правой части уравнений. Первые слагаемые  $a_E, a_G$  обоих уравнений уже построены. Остаётся продолжить эти цепи и на пересечении получить конец  $f$  ускорения  $a_F$ .

#### 4.1.4.2 Группа Ассур с внешней поступательной парой

На рис. 4.9, а эту группу образуют звенья 4, 5. Чтобы не повторяться, движение звеньев 1, 2, 3 предшествующего механизма считается известным. Задача состоит в определении скорости и ускорения только точки  $F$ .

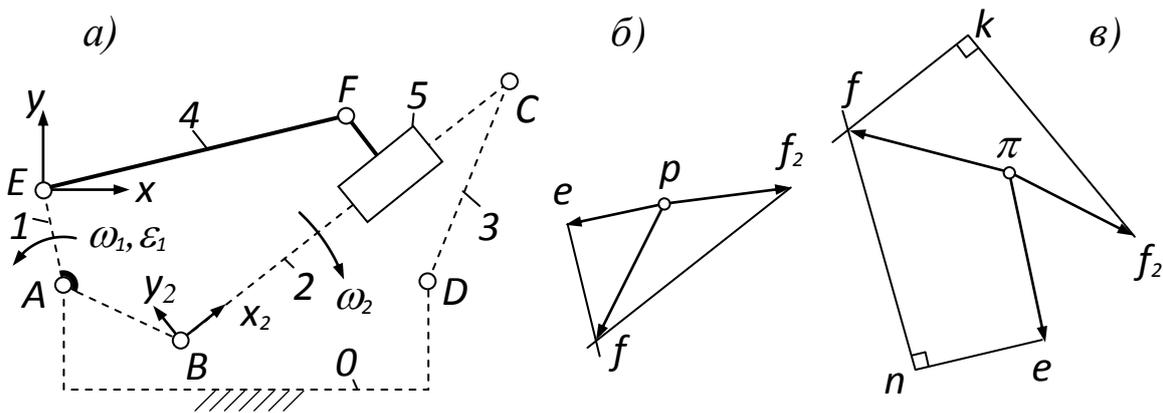


Рис. 4.9

Определение скорости точки  $F$ . Для решения задачи вводят систему координат  $Eху$ , движущуюся поступательно, и систему  $x_2y_2$ , неизменно связанную со звеном 2 предшествующего механизма. Первую из этих систем считают несущей для зве-

на 4, вторую – несущей для звена 5. Из вытекающих отсюда разложений движения составляют уравнения:

$$\begin{aligned}v_F &= v_E + v_{FE}; \\v_F &= v_{F_2} + v_{F_5 2}.\end{aligned}$$

До сих пор при составлении уравнений не было необходимости в указании номера звена, к которому относится та или иная точка, т. к. подразумевались шарнирные точки или просто шарниры. Теперь же этого недостаточно, и  $v_F$  – это скорость шарнира  $F$ , объединяющего точки  $F_4, F_5$ , а  $v_{F_2}$  – скорость только точки  $F_2$ , отмеченной на звене 2 и неизменно связанной с ним. Соответственно,  $v_{F_5 2}$  есть скорость точки  $F_5$  относительно звена 2.

Переносные скорости  $v_E$  и  $v_{F_2}$  в приведённой выше системе уравнений известны из предполагаемого анализа предшествующего механизма. Относительные скорости известны своими линиями действия, а именно:  $v_{FE} \perp FE$ ,  $v_{F_5 2} \parallel BC$ . Всего этого достаточно, чтобы решить систему. Результат показан на рис. 4.9, б.

Определение ускорения точки  $F$ . Из тех же разложений движения, что и в случае скоростей, следует:

$$\begin{aligned}a_F &= a_E + a_{FE}^n + a_{FE}^\tau; \\a_F &= a_{F_2} + a_{F_5 2} + a_k.\end{aligned}$$

Переносные ускорения  $a_E$  и  $a_{F_2}$  известны из предполагаемого анализа предшествующего механизма. Нормальную составляющую вычисляют по формуле  $a_{FE}^n = v_{FE}^2 / l_{FE}$ . Входящую сюда скорость  $v_{FE}$  берут из плана скоростей. Тангенциальная составляющая  $a_{FE}^\tau$  перпендикулярна  $FE$ , величина её неизвестна.

Ускорение  $a_{F_5 2}$  точки  $F_5$  относительно звена 2 параллельно  $BC$ , величина его также неизвестна. Ускорение Кориолиса вычисляют по формуле  $a_k = 2\omega_2 v_{F_5 2}$ . Входящая сюда скорость  $\omega_2$  предполагается известной из анализа предшествующего механизма. Скорость  $v_{F_5 2}$  берут из плана скоростей, её изображает вектор  $f_2 f$ . Направление ускорения Кориолиса получают поворотом вектора  $v_{F_5 2}$  на  $90^\circ$  в сторону скорости  $\omega_2$ . Таким образом, ускорение  $a_k$  известно и по величине, и по направлению. На рисунке его изображает вектор  $f_2 k$ .

Перед решением системы уравнений ускорение  $a_{F_5 2}$  переставляют на последнее место, т. к. оно известно только линией действия. На пересечении линий действия последних слагаемых получают конец  $f$  ускорения  $a_F$  (рис. 4.9, в).

#### 4.1.4.3 Группа Ассура с внутренней поступательной парой

На рис. 4.10, а эту группу образуют звенья 4, 5. Как и прежде, предшествующий механизм считается проанализированным. Определению подлежат скорость и ускорение точки  $E_5$ , а также угловая скорость и ускорение звена 5.

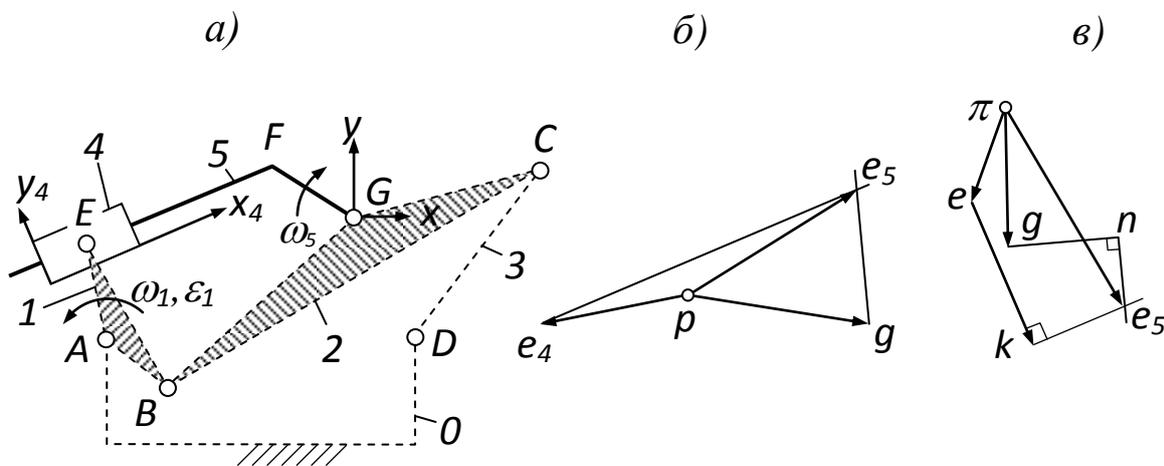


Рис. 4.10

Определение скоростей. Со звеном 4 связывают систему координат  $x_4y_4$ , а с точкой G – систему  $Gx$ , движущуюся поступательно. Каждую из введенных систем поочередно принимают за несущую для звена 5. Указание несущей системы однозначно определяет разложение движения. Из обоих разложений соответственно получают:

$$v_{E_5} = v_{E_4} + v_{E_5 4};$$

$$v_{E_5} = v_G + v_{E_5 G}.$$

Переносные скорости  $v_{E_4}$ ,  $v_G$  известны из анализа предшествующего механизма; скорость  $v_{E_5 4}$  точки  $E_5$  относительно системы  $x_4y_4$  или, что то же, относительно звена 4 направлена вдоль линии  $EF$ ; скорость  $v_{E_5 G}$  точки  $E_5$  относительно системы  $Gx$  перпендикулярна  $EG$ . Перечисленного достаточно, чтобы решить систему. Результат показан на рис. 4.10, б.

Угловая скорость звена 4 такая же, как у звена 5. Последнюю определяют по формуле  $\omega_5 = v_{E_5G}/l_{EG}$ . Скорость  $v_{E_5G}$  снимают с плана скоростей, расстояние  $l_{EG}$  снимают со схемы механизма. Направление скорости  $\omega_5$  указывает вектор  $ge_5$ , изображающий скорость  $v_{E_5G}$ . После переноса по принадлежности в точку  $E$  он вращает звено 5 по часовой стрелке, сюда и направлена скорость  $\omega_5$ .

Определение ускорений. Для ускорения точки  $E_5$  система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} a_{E_5} &= a_{E_4} + a_k + a_{E_54}; \\ a_{E_5} &= a_G + a_{E_5G}^n + a_{E_5G}^{\tau}. \end{aligned}$$

Переносные ускорения в этой системе известны из анализа предшествующего механизма. Ускорение Кориолиса  $a_k = 2\omega_4 v_{E_54}$ . Скорость  $v_{E_54}$  изображает вектор  $e_4 e_5$ . После поворота на  $90^\circ$  в сторону скорости  $\omega_4$  (совпадающей с  $\omega_5$ ) он указывает направление ускорения  $a_k$ , оно сразу поставлено на второе место. Ускорение  $a_{E_5G}^n = v_{E_5G}^2/l_{EG}$  и направлено от  $E$  к  $G$ . Таким образом, есть всё необходимое для решения системы. Результат решения показан на рис. 4.10, в. Правым частям уравнений искомого ускорения соответствуют на этом рисунке ломаные  $peke_5$  и  $pgne_5$ .

Если ось поступательной пары проходит через точку  $G$ , то системы координат располагают, как показано на рис. 4.11, и определяют скорость и ускорение точки  $G_4$ .

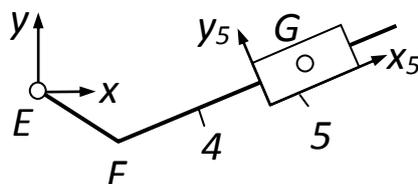


Рис. 4.11

Требующиеся при этом уравнения приведены ниже.

$$\begin{aligned} v_{G_4} &= v_E + v_{G_4E}, & a_{G_4} &= a_E + a_{G_4E}^n + a_{G_4E}^{\tau}, \\ v_{G_4} &= v_{G_5} + v_{G_45}, & a_{G_4} &= a_{G_5} + a_k + a_{G_45}. \end{aligned}$$

Рассмотренных групп Ассур достаточно, чтобы самостоятельно справиться с остальными.

### 4.1.5 Некоторые задачи синтеза

Все задачи синтеза будут рассмотрены на примере шарнирного четырёхзвенника (рис. 4.12, а). От них легко перейти к синтезу других механизмов.

#### 4.1.5.1 Синтез по крайним положениям коромысла

При таких пропорциях, как на рисунке, звено  $AB$  – кривошип, звено  $BC$  – шатун,  $CD$  – коромысло. Кривошип совершает полный оборот относительно стойки, коромысло – не полный, этим они и отличаются.

По условию синтеза даны длина стойки и коромысла, а также углы  $\psi_1, \psi_2$  коромысла в его крайних положениях (рис. 4.12, б). Требуется определить длину кривошипа и шатуна.

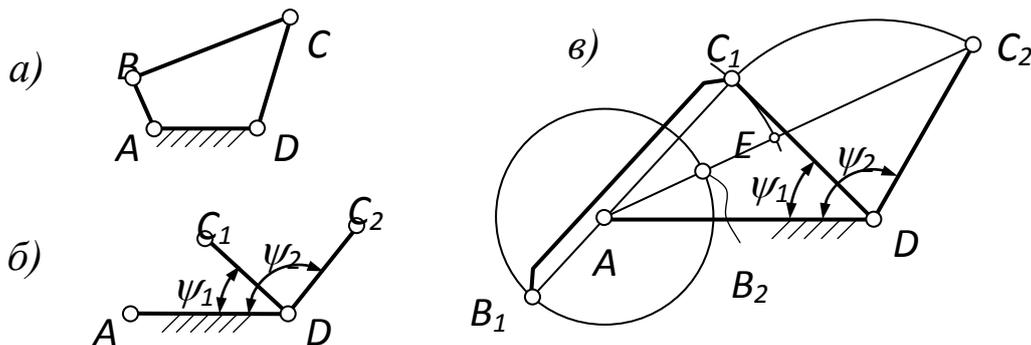


Рис. 4.12

В крайних положениях коромысла кривошип и шатун либо складываются в одну прямую  $AB_1C_1$ , либо вытягиваются в одну прямую  $AB_2C_2$  (рис. 4.12, в). На этом основании составляют следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} l_{AC_2} &= l_{BC} + l_{AB}; \\ l_{AC_1} &= l_{BC} - l_{AB}. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получают:  $l_{AC_2} - l_{AC_1} = 2l_{AB}$ . Отсюда  $l_{AB} = (l_{AC_2} - l_{AC_1})/2$ . Чтобы решить задачу графическим методом до конца, из точки  $A$  радиусом  $AC_1$  отсекают отрезок  $l_{EC_2}$ , равный разности  $(l_{AC_2} - l_{AC_1})$ . Подставляя  $l_{EC_2}$  в формулу для  $l_{AB}$ , находят длину кривошипа:  $l_{AB} = l_{EC_2}/2$ . Затем из точки  $A$  радиусом  $l_{AB}$  проводят окружность и находят длину  $l_{B_2C_2}$  шатуна.

### 4.1.5.2 Синтез по положениям шатуна

Пусть требуется синтезировать механизм по двум положениям шатуна –  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  (рис. 4.13, а).

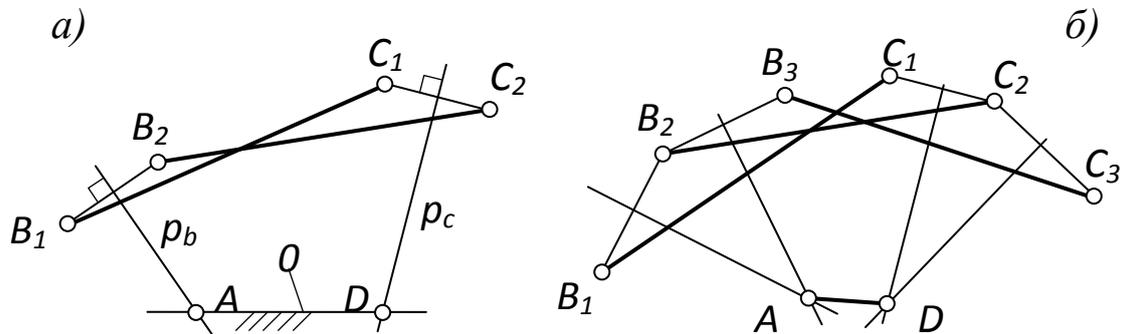


Рис. 4.13

По рис. 4.12, а видно, что концы шатуна движутся по окружностям. Одна из них проходит через точки  $B_1, B_2$  (см. рис. 4.13, а), другая – через точки  $C_1, C_2$ . Число точек, через которые проходит каждая окружность, две. Из геометрии известно, что через две точки можно провести бесконечное множество окружностей. Их центры лежат на перпендикуляре, проведённом через середину отрезка, соединяющего точки.

На этом основании из середин отрезков  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  восстанавливают к ним перпендикуляры  $p_b, p_c$ . Задаваясь линией стойки  $O$ , на пересечении с ней находят положение шарниров  $A, D$ . Остаётся соединить их с одним из заданных положений шатуна, и задача решена. Ввиду произвольного положения линии стойки задача имеет множество решений.

При трёх заданных положениях шатуна (рис. 4.13, б) решение получается единственным, т. к. через три точки, например  $B_1, B_2, B_3$ , можно провести только одну окружность. Её центр  $A$  находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков  $B_1B_2$  и  $B_2B_3$ .

### 4.1.5.3 Синтез по трём положениям кривошипа и коромысла

Условие синтеза поясняет рис. 4.14, а. Заданы: длина кривошипа  $AB$ , длина стойки  $AD$ , углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Угол  $\psi$  характеризует положение какой-нибудь функционально важной

прямой  $DE$ , связанной с коромыслом. Требуется определить недостающие размеры четырёхзвенника.

Задачу решают обращением движения относительно коромысла. Для этого изображают все три положения цепи  $DAB$  относительно прямой  $DE$  (рис. 4.14, б).

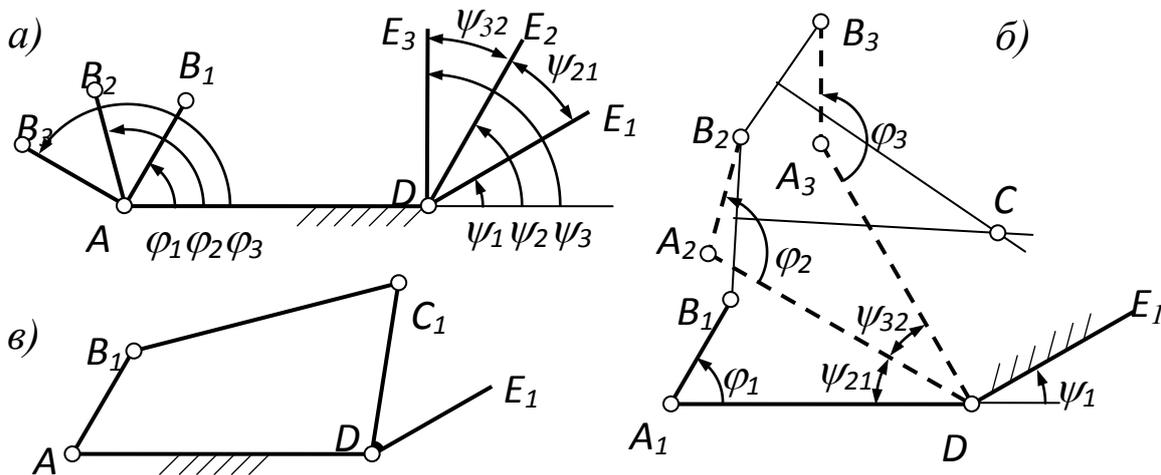


Рис. 4.14

Первое положение  $DA_1B_1$  копируют с картины абсолютного движения (см. рис. 4.14, а). Второе получают из следующего рассуждения. При переходе механизма из первого положения во второе коромысло поворачивается относительно стойки на угол  $\psi_{21} = \psi_2 - \psi_1$ . На такой же угол, но в обратную сторону, должна повернуться стойка относительно коромысла. Отступив от  $DA_1$  на угол  $\psi_{21}$ , изображают второе положение стойки –  $DA_2$ . К стойке пристраивают кривошип, располагая его относительно стойки под известным углом  $\varphi_2$ . В итоге получают положение всей цепи –  $DA_2B_2$ . Аналогично строят третье положение –  $DA_3B_3$ .

Точка  $B$  движется относительно коромысла по окружности. Центр этой окружности лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков  $B_1B_2$  и  $B_2B_3$ . Здесь и должен находиться искомый шарнир  $C$ . Соединяя точку  $C$  с  $D$  и  $B_1$ , получают искомый четырёхзвенник в его первом положении (рис. 4.14, в).

Как и в предыдущей задаче, при трёх заданных положениях решение получается единственным. Это связано с возможностью проведения через три заданные точки только одной окружности.

#### 4.1.5.4 Синтез по заданной шатунной кривой

Шатунной кривой называется траектория, которую описывает какая-либо точка шатуна. Пусть требуется, чтобы точка  $E$  четырёхзвенника  $ABCD$ , построенного интуитивно, описывала на некотором отрезке горизонтальную прямую (рис. 4.15, *a*).

С помощью шарнирного четырёхзвенника невозможно добиться идеальной прямой, поэтому требуют, чтобы траектория проходила хотя бы через некоторые точки этой прямой, например, начальную –  $E_1$ , промежуточную –  $E_2$  и конечную  $E_3$ .

Проворачивание механизма (см. пунктир) показывает, что при существующих размерах невозможно удовлетворить и этому условию. Тогда одно из звеньев, примыкающих к стойке, удаляют и отыскивают новое положение точки  $D$ .

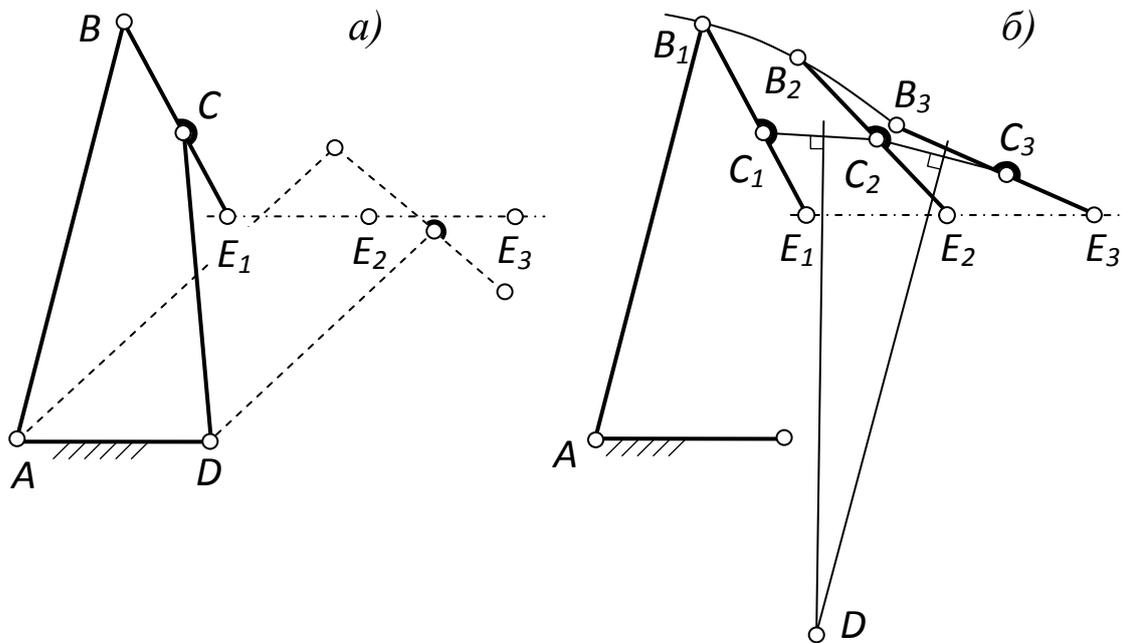


Рис. 4.15

На рис. 4.15, *б* удалено звено  $CD$ . Теперь цепь  $ABE$  позволяет точке  $E$  двигаться в любом направлении. Проводя эту точку через заданные положения –  $E_1, E_2, E_3$ , находят три положения точки  $C$ . Через три положения можно провести единственную окружность. Её центр указывает новое положение шарнира  $D$ . Точку  $D$  соединяют с  $A$  и  $C_1$ . Отрезок  $DA$ , на рисунке он не показан, – это новая стойка искомого механизма,  $DC_1$  – новое коромысло.

**4.1.5.5 Синтез по коэффициенту производительности**

Коэффициентом производительности  $k$  называется отношение средних скоростей холостого и рабочего ходов коромысла. За время этих ходов кривошип поворачивается на угол  $\varphi_{x.x}$ ,  $\varphi_{p.x}$  соответственно (рис. 4.16, а).

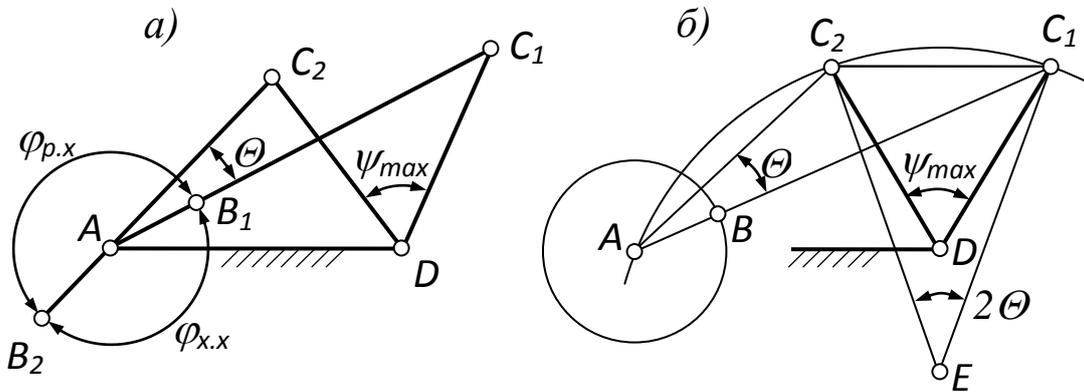


Рис. 4.16

При равномерном вращении кривошипа  $k = \varphi_{p.x}/\varphi_{x.x}$ . Как видно по рисунку,  $\varphi_{p.x} = 180^\circ + \theta$ ,  $\varphi_{x.x} = 180^\circ - \theta$ . После подстановок получают:  $k = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}$ . Для дальнейшего важно иметь обратную зависимость:  $\theta = 180^\circ \frac{k-1}{k+1}$ . При синтезе дана длина коромысла  $l_{CD}$ , угол его качания  $\psi_{max}$  и коэффициент производительности  $k$ . По этим данным изображают два положения коромысла, располагая их симметрично вертикали и под углом  $\psi_{max}$  друг к другу (рис. 4.16, б).

Через  $k$  вычисляют угол  $\theta$ . На отрезке  $C_1C_2$  строят равнобедренный треугольник  $C_1C_2E$  с углом  $2\theta$  при вершине  $E$ . Из этой вершины проводят окружность радиуса  $EC$ . В произвольном месте окружности отмечают точку  $A$ . Из точки  $A$  строят угол, опирающийся на хорду  $C_1C_2$ .

Из геометрии известно, что центральный угол, опирающийся на хорду, в два раза больше угла, построенного из любой точки окружности и опирающегося на ту же хорду. Следовательно, угол при точке  $A$  равен  $\theta$ . Из сопоставления с рис. 4.16, а следует, что точка  $A$  является центром вращения кривошипа. Как известно из задачи синтеза по крайним положениям коромысла, длина кривошипа  $l_{AB} = (l_{AC_1} - l_{AC_2})/2$ . На этом задачу можно считать решённой.

## 4.2 Аналитические методы кинематического анализа и синтеза

Как для анализа, так и для синтеза нужны прежде всего уравнения координат звеньев и отдельных точек этих звеньев. Многочисленные методы вывода этих уравнений сводятся либо к методу векторных контуров, либо к методу преобразования координат. Для плоских механизмов наиболее эффективен метод векторных контуров, для пространственных – метод преобразования координат.

### 4.2.1 Метод векторных контуров

#### 4.2.1.1 Определение положений

Известны все постоянные параметры шарнирного четырёхзвенника  $ABCD$  –  $l_0, l_1, l_2, l_3, l_{2a}, \alpha$  (рис. 4.17, а). Параметр  $l_0$  – это длина стойки  $AD$ ,  $l_1$  – длина кривошипа  $AB$  и т. д. Цифровой индекс при  $l$  указывает номер звена или его части.

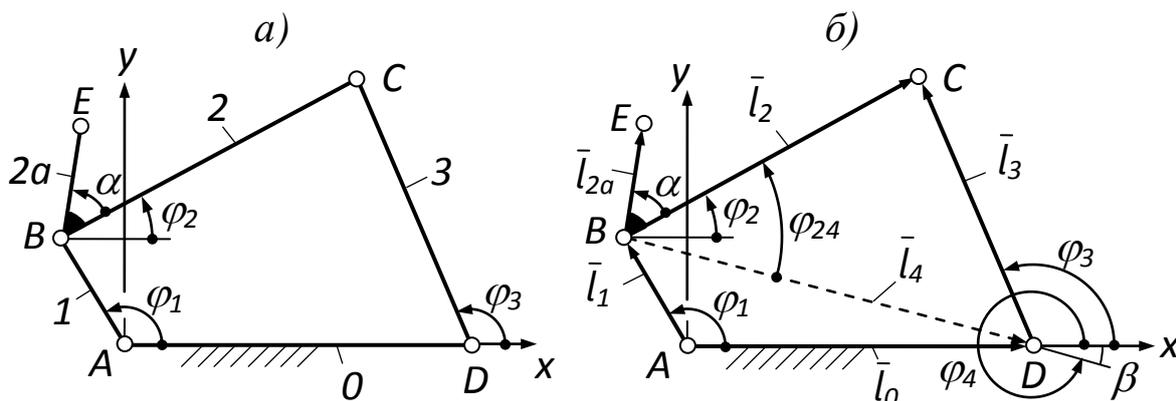


Рис. 4.17

Переменными параметрами являются углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , а также координаты точек  $B, C, E$  относительно системы  $Axу$ , связанной со стойкой. Полагая, что параметр  $\varphi_1$  есть независимая переменная, требуется вывести формулы, по которым можно вычислить все прочие переменные параметры.

Переменные параметры характеризуют положение звеньев и отдельных точек этих звеньев, следовательно, предлагается решить задачу о положениях. Как и при графическом решении такой задачи, механизм раскладывают на группы Ассур. Поскольку угол  $\varphi_1$  задаёт положение звена  $I$  относительно стойки  $O$ , то меха-

низм  $0$ ,  $1$  принимают за начальный. Первую и единственную группу Ассура образует при этом цепь  $2, 3$ .

При решении задачи методом векторных контуров с каждым звеном механизма связывают вектор (рис. 4.17, б), выбранный так, чтобы образовался замкнутый векторный контур, кинематически эквивалентный механизму. Если контур четырёхугольный, как в данном случае, то для упрощения вывода формул вводят ещё один вектор, который делит четырёхугольный контур на два треугольных<sup>2</sup>.

Один из треугольных контуров должен содержать векторы, связанные со звеньями начального механизма. Из двух добавочных векторов –  $AC$  и  $BD$  этому требованию удовлетворяет лишь последний, обозначенный через  $l_4$ .

Направление векторов выбирают произвольно. Однако для вращающихся звеньев предпочтительно направлять векторы от центра вращения, для прочих звеньев векторы направляют так, чтобы в любой фазе движения механизма они оставались в верхней или правой половине тригонометрического круга.

Завершив формирование замкнутых векторных контуров, показывают положительные углы векторов относительно оси  $x$  (и только  $x$ ). Положительные углы отсчитывают, как известно, против хода часовой стрелки.

Далее составляют *уравнение замкнутости* векторного контура  $ABD$ , содержащего начальный механизм. Уравнение замкнутости представляет собой уравнение геометрической суммы векторов. Этой сумме придают такую форму, при которой она равна нулю. Сумма равна нулю при условии, что векторы, попутные обходу контура в произвольном направлении, подставляются в эту сумму со знаком «плюс», а встречные – со знаком «минус». При обходе контура  $ABD$  по часовой стрелке получают:

$$l_1 + l_4 - l_0 = 0.$$

По уравнению замкнутости составляют *уравнения проекций* векторного контура на оси координат. Для этого при проецировании на ось  $x$  модуль каждого вектора, входящего в уравнение замкну-

---

<sup>2</sup> Решение задачи без дополнительного вектора позволяет использовать один и тот же контур для вывода координат и их производных, однако это решение сложнее.

тости, умножают на косинус угла этого вектора с осью  $x$ , а при проецировании на ось  $y$  – на синус того же угла. Знаки в уравнениях проекций оставляют такими же, как в уравнении замкнутости. Учитывая, что угол вектора  $l_0$  равен нулю, получают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_4 \cos \varphi_4 - l_0 &= 0; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_4 \sin \varphi_4 - 0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Корнями этой системы (4.4) являются  $l_4$  и  $\varphi_4$ . Систему решают исключением одного из неизвестных. Для этого выносят за знак равенства слагаемые  $l_4 \cos \varphi_4$  и  $l_4 \sin \varphi_4$ . Уравнения, полученные после переноса, возводят в квадрат и складывают друг с другом. После несложных преобразований находят первый корень:

$$l_4 = \sqrt{l_0^2 + l_1^2 - 2l_0 l_1 \cos \varphi_1}.$$

Второй корень находят из второго уравнения системы:

$$\varphi_4 = \arcsin \frac{-l_1 \sin \varphi_1}{l_4}.$$

При вычислении по этой формуле компьютер выдаст угол  $\beta$  с «минусом», что верно. Первое уравнение дало бы угол  $\beta$  с «плюсом», что не верно. Исчерпав все возможности контура  $ABD$ , составляют уравнение замкнутости и уравнения проекций контура  $BCD$ :

$$\begin{aligned} l_2 - l_3 - l_4 &= 0; \\ l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos \varphi_4 &= 0; \\ l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Корнями системы (4.5) являются  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ . Исключая  $\varphi_3$ , как это делалось выше, получают первый корень системы:

$$\varphi_2 = \arccos \frac{l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2l_2 l_4} + \varphi_4.$$

Из первого уравнения системы (4.5) выводят второй корень:

$$\varphi_3 = \arccos \frac{l_2 \cos \varphi_2 - l_4 \cos \varphi_4}{l_3}.$$

Для вывода уравнений координат какой-либо точки вводят её радиус-вектор. Как известно, это вектор, идущий в точку из начала координат. Радиус-вектор представляют как геометрическую сум-

му кратчайшей цепи векторов, ведущих в эту точку. Так, для точки  $B$  радиус-вектор совпадает с  $l_1$ . Радиус-вектор  $r_C$  точки  $C$ , не изображённый ради простоты рисунка, должен идти из точки  $A$  в точку  $C$ . Его можно представить двумя равносильными уравнениями:  $r_C = l_1 + l_2$  и  $r_C = l_0 + l_3$ . Радиус-вектор  $r_E$  точки  $E$ , также не изображённый, представляют в виде  $r_E = l_1 + l_{2a}$ .

При составлении уравнений проекций радиус-вектора, представленного суммой, движутся по векторным цепям в направлении от начала радиус-вектора в его конец. Векторы, попутные обходу, подставляют в сумму со знаком «плюс», встречные – со знаком «минус». В данном случае все векторы попутные. Если бы, например, вектор  $l_{2a}$  был направлен от точки  $E$  к точке  $B$ , то в уравнении перед ним был бы «минус». В остальном правила составления уравнений проекций такие же, как для суммы, равной нулю. На основании этих правил получают:

$x_B = l_1 \cos \varphi_1$	$x_C = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$	$x_E = l_1 \cos \varphi_1 + l_{2a} \cos \varphi_2 + \alpha$
$y_B = l_1 \sin \varphi_1$	$y_C = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$	$y_E = l_1 \sin \varphi_1 + l_{2a} \sin \varphi_2 + \alpha$

Подставляя в полученные формулы требуемые значения независимой переменной  $\varphi_1$ , последовательно вычисляют  $l_4, \varphi_4, \varphi_2, \varphi_3, x_B, y_B$  и т. д. На этом задача о положениях решена полностью.

#### 4.2.1.2 Определение скоростей и ускорений

Для определения скоростей и ускорений выводят сначала уравнения их аналогов, т. е. производных от координат по  $\varphi_1$ . Для четырёхзвенных механизмов несложно получить производные аналитически. Уравнения получаются проще, если дифференцировать не конечные выражения, а уравнения проекций, причём, четырёхугольного контура  $ABCD$ , а не составляющих его треугольных контуров. Уравнение замкнутости контура  $ABCD$ , уравнения проекций и их производные приведены ниже:

$$\begin{aligned}
 l_1 + l_2 - l_3 - l_0 &= 0; \\
 l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 - l_0 &= 0, \\
 l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 - 0 &= 0; \\
 -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 (\sin \varphi_2) \varphi_2' - l_3 (\sin \varphi_3) \varphi_3' &= 0, \\
 l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \varphi_2' - l_3 \cos \varphi_3 \varphi_3' &= 0.
 \end{aligned}$$

Корнями последней системы являются только  $\varphi'_2$  и  $\varphi'_3$ , т. к. все угловые координаты уже вычислены. Система линейна и решить её можно многими известными способами. Когда координаты стоят под знаком синуса и косинуса, систему можно решить поворотом осей координат.

После поворота против хода часовой стрелки на  $\varphi_3$ , затем на  $\varphi_2$  все углы уменьшаются и первое уравнение системы (4.6) обретает следующие две формы:

$$\begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_3 - l_2 \varphi'_2 \sin \varphi_2 - \varphi_3 &= 0; \\ -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2 - l_3 \varphi'_3 \sin \varphi_3 - \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из них следует:  $\varphi'_2 = \frac{-l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_3}{l_2 \varphi'_2}$ ;  $\varphi'_3 = \frac{-l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2}{l_3 \varphi'_3}$ .

При данном методе нахождения корней второе уравнение системы (4.6) остаётся невостребованным. Оно остаётся таковым и при выводе вторых производных.

Дифференцируя первое уравнение системы (4.6), получают:

$$-l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 \varphi'_2{}^2 - l_2 \varphi''_2 \sin \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 \varphi'_3{}^2 - l_3 \varphi''_3 \sin \varphi_3 = 0.$$

Уравнение содержит два неизвестных –  $\varphi''_2$  и  $\varphi''_3$ . Повернув оси на  $\varphi_3$ , затем на  $\varphi_2$ , получают:

$$\begin{aligned} \varphi''_2 &= \frac{-l_1 \cos \varphi_1 - \varphi_3 - l_2 \cos \varphi_2 - \varphi_3 \varphi'_2{}^2 - l_3 \varphi'_3{}^2}{l_2 \sin \varphi_2 - \varphi_3}; \\ \varphi''_3 &= \frac{-l_1 \cos \varphi_1 - \varphi_2 - l_2 \varphi'_2{}^2 - l_3 \cos \varphi_3 - \varphi_2 \varphi'_3{}^2}{l_3 \sin \varphi_3 - \varphi_2}. \end{aligned}$$

Производные от координат точек  $B, C, E$  получают дифференцированием конечных выражений, приведённых выше в таблице.

К скоростям и ускорениям переходят по формулам, выведенным в разделе «Кулачковые механизмы». Например,

$\omega_2 = \omega_1 \varphi'_2$ ,  $\varepsilon_2 = \omega_1^2 \varphi''_2 + \varepsilon_1 \varphi'_2$ . Скорость  $\omega_1$  и ускорение  $\varepsilon_1$  звена  $I$  предполагаются известными. Проекция скорости точки  $E$ :

$$\begin{aligned} v_{E x} &= \omega_1 x'_E = \omega_1 [-l_1 \sin \varphi_1 - l_2 a \sin \varphi_2 + \alpha \varphi'_2]; \\ v_{E y} &= \omega_1 y'_E = \omega_1 [l_1 \cos \varphi_1 + l_2 a \cos \varphi_2 + \alpha \varphi'_2]. \end{aligned}$$

Формулы ускорений точки  $E$  ещё длиннее, поэтому не приводятся.

## 4.2.2 Метод преобразования координат

### 4.2.2.1 Случай незамкнутой цепи

Незамкнутые цепи составляют основу всевозможных манипуляторов, например такого, как на рис. 4.18.

Манипулятор оперирует с деталью 6, которая на данный момент составляет единое целое со схватом, удерживающим эту деталь. На этом основании схват и деталь считаются звеном 6. Звенья 3, 4, 5 образуют так называемый *карданов подвес*. Оси всех его шарниров пересекаются в центре  $D$  крестовины 4. Для упрощения схемы крестовина и связанные с ней вилки 3, 5 показаны в усечённом виде. Цепь  $0...3$  состоит только из поступательных пар.

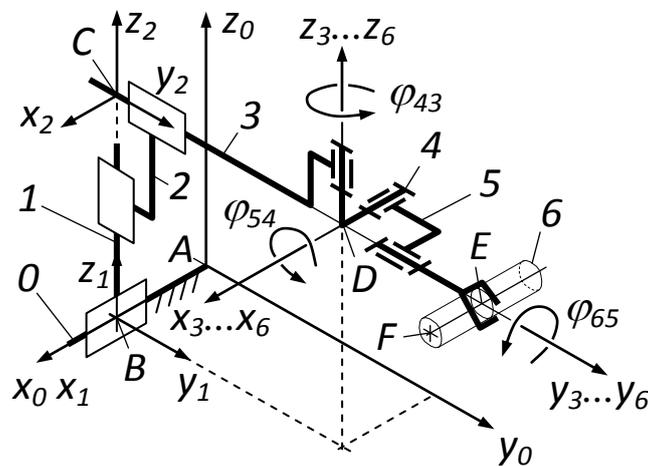


Рис. 4.18

Пусть изображённое положение манипулятора является исходным. Известны расстояния  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$  и т. д. между всеми узловыми точками – от  $A$  до  $F$  включительно. Требуется определить координаты точки  $F$  относительно системы  $Ax_0y_0z_0$ , связанной со стойкой, при условии, что звенья 4, 5, 6 развернулись на заданные углы  $\varphi_{43}$ ,  $\varphi_{54}$ ,  $\varphi_{65}$ , соответственно. Направление поворота, показанное на рисунке, обосновывается ниже.

Непосредственное преобразование координат. Для решения задачи с каждым звеном связывают одноимённые (по номеру) системы координат. Положение систем в принципе произвольное. Исходя из будущих удобств, начала систем, свя-

занных со звеньями 3...6, располагают в центре крестовины. Одноимённые оси этих систем направляют одинаково.

Задачу решают последовательным преобразованием координат точки  $F$  из системы 6 в 5, из 5 в 4 и т. д., вплоть до системы 0. Как известно из аналитической геометрии, преобразование координат из системы  $j$  в систему  $i$  производится по формулам (4.7)... (4.9). О назначении формулы (4.10) будет сказано позже.

$$x_i = x_j \cos(x_i \wedge x_j) + y_j \cos(x_i \wedge y_j) + z_j \cos(x_i \wedge z_j) + a; \quad (4.7)$$

$$y_i = x_j \cos(y_i \wedge x_j) + y_j \cos(y_i \wedge y_j) + z_j \cos(y_i \wedge z_j) + b; \quad (4.8)$$

$$z_i = x_j \cos(z_i \wedge x_j) + y_j \cos(z_i \wedge y_j) + z_j \cos(z_i \wedge z_j) + c; \quad (4.9)$$

$$1 = x_j \cdot 0 + y_j \cdot 0 + z_j \cdot 0 + 1. \quad (4.10)$$

Буквами  $a, b, c$  в трёх первых формулах обозначены, соответственно, абсцисса, ордината и аппликата начала системы  $j$  относительно  $i$ . В скобках стоят углы между осями координат.

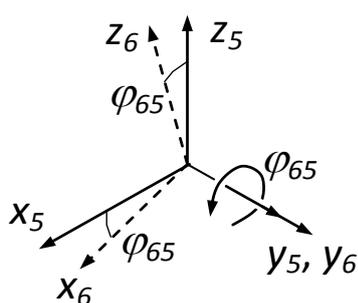


Рис. 4.19

Чтобы составить формулы преобразования координат, например из системы 6 в 5, эти системы изображают отдельно (рис. 4.19). Систему 6 показывают повернутой на небольшой положительный угол  $\varphi_{65}$  независимо от действительного угла поворота. Угол поворота считается положительным, если при наблюдении из конца оси поворота в её начало этот поворот происходит против хода часовой стрелки. По такому же принципу расставляют углы поворота на схеме манипулятора.

В формулы преобразования координат должны войти координаты точки  $F$  в системе 6. Они известны:  $x_{F_6} = l_{EF}$ ,  $y_{F_6} = l_{DE}$ ,  $z_{F_6} = 0$ . Углы между осями должны быть выражены через угол поворота  $\varphi_{65}$ . Сделать это позволяет рис. 4.18. Координаты начала системы 6 относительно 5 определимы по рис. 4.17. Все эти координаты равны нулю. С учётом всех обстоятельств координаты точки  $F$  в системе 5 выглядят так:

$$x_{F_5} = x_{F_6} \cos \varphi_{65} + y_{F_6} \cos 90^\circ + z_{F_6} \cos 90^\circ - \varphi_{65} + 0;$$

$$y_{F_5} = x_{F_6} \cos 90^\circ + y_{F_6} \cos 0^\circ + z_{F_6} \cos 90^\circ + 0;$$

$$z_{F_5} = x_{F_6} \cos 90^\circ + \varphi_{65} + y_{F_6} \cos 90^\circ + z_{F_6} \cos \varphi_{65} + 0.$$

Остаётся привести формулы к более простому виду, и первый этап преобразования координат можно считать завершённым.

Найденные координаты можно вычислить сразу или подставить их выражения в уравнения следующего преобразования. При подстановке получаются необозримо длинные формулы. Для сокращения записей преобразование координат производят в матричной форме.

Матричная форма преобразования координат. Из всех операций, производимых над матрицами, далее понадобится только умножение. Умножать матрицы удобно, располагая их уступом. Пусть матрица  $A$ , состоящая из элементов  $a_{ij}$ , умножается на матрицу  $B$ , состоящую из элементов  $b_{ij}$ . Тогда произведение  $A \cdot B$  получится, как показано на рис. 4.20 в рамке, обведённой жирной линией.

		$b_{11}$	$b_{12}$
		$b_{21}$	$b_{22}$
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$	$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$	$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

Рис. 4.20

Расположение уступом удобно тем, что любой элемент результирующей матрицы находится на пересечении именно той строки и того столбца, которые нужно перемножить, чтобы получить данный элемент.

Перемножение строки на столбец производится так: двигаясь по строке слева направо, а по столбцу сверху вниз, умножают первый элемент строки на первый элемент столбца; к полученному прибавляют произведение второго элемента строки на второй элемент столбца. Так делают до тех пор, пока не дойдут до конца строки и столбца. Это происходит одновременно, т. к. перемножать можно только такие матрицы, у которых число элементов в строке первого сомножителя равно числу элементов в столбце второго. Сомножители нельзя менять местами.

После добавления к уравнениям (4.7)...(4.9) искусственного уравнения (4.10) все четыре уравнения представимы как результат следующего матричного произведения (рис. 4.21).

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{array} & \\
 \hline
 R_i & \\
 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c}
 \cos(x_i \wedge x_j) & \cos(x_i \wedge y_j) & \cos(x_i \wedge z_j) & a \\
 \cos(y_i \wedge x_j) & \cos(y_i \wedge y_j) & \cos(y_i \wedge z_j) & b \\
 \cos(z_i \wedge x_j) & \cos(z_i \wedge y_j) & \cos(z_i \wedge z_j) & c \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \times \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{array} & \\
 \hline
 R_j & \\
 \end{array}$$

Рис. 4.21

Обозначая матрицы, как показано на рисунке снизу, существенно сокращают формулу преобразования координат:

$$R_i = T_{ji} R_j. \quad (4.11)$$

$T_{ji}$  называется матрицей преобразования координат из системы  $j$  в систему  $i$ .  $R_i$  и  $R_j$  – матрицы искомым и заданных координат.

Применительно к задаче о манипуляторе, матричная формула преобразования координат имеет вид:

$$R_{F_0} = T_{10} T_{21} T_{32} T_{43} T_{54} T_{65} R_{F_6}. \quad (4.12)$$

Столбцевая матрица  $R_{F_6}$  состоит из координат  $x_{F_6}$ ,  $y_{F_6}$ ,  $z_{F_6}$  и единицы. Умножение матрицы  $R_{F_6}$  на  $T_{65}$  слева преобразует координаты точки  $F$  из системы 6 в систему 5, т. е. получается матрица, состоящая из координат  $x_{F_5}$ ,  $y_{F_5}$ ,  $z_{F_5}$  и единицы. Умножение на  $T_{54}$  преобразует эти координаты из системы 5 в 4. И так далее.

Располагая формулой (4.12), задачу можно решить, минуя обычные уравнения преобразования координат. Для этого достаточно составить и перемножить матрицы. Матрицы составляют, руководствуясь картиной взаимного положения систем координат, а также общим видом матриц, показанным на рис. 4.21.

Матрица  $T_{ji}$  на этом рисунке состоит из трёх блоков. Ячейки, заполненные косинусами, образуют матрицу направляющих косинусов или *матрицу поворота*. Справа от неё располагается столбец  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Внизу – строка  $0$ ,  $0$ ,  $0$ ,  $1$ . По этим блокам и составляют

матрицу. Для ориентации в отношении углов между осями координат сверху и сбоку матрицы располагают подсказки. Сверху располагают обозначения осей той системы, из которой ведётся преобразование, сбоку – в которую.

Но не стоит спешить с составлением матриц: существует возможность сократить цепь преобразований. Это можно сделать за счёт следующего. При любых преобразованиях оси системы 4 (см. рис. 4.18) остаются повернутыми относительно системы 0 на угол  $\varphi_{40} = \varphi_{43}$ . Поворот происходит вокруг оси  $z_4$ , всегда параллельной оси  $z_0$ . На этом основании становится возможным определить углы между любыми осями систем 4 и 0. Координаты начала системы 4 относительно 0 также очевидны – это координаты точки  $D$ . С учётом всех этих обстоятельств матрицу  $T_{40}$  преобразования координат из системы 4 в 0 можно составить сразу. Она заменит произведение  $T_{10}T_{21}T_{32}T_{43}$ . Обратите внимание на индексы матрицы  $T_{40}$  – они складываются из внутренних индексов крайних матриц произведения. После замены этого произведения получают:

$$R_{F_0} = T_{40}T_{54}T_{65}R_{F_6}. \quad (4.13)$$

Об  $R_{F_6}$  говорилось выше, остальные матрицы приведены ниже.

$T_{40}$				$T_{54}$				$T_{65}$									
$x_4$		$y_4$		$z_4$		$x_5$		$y_5$		$z_5$		$x_6$		$y_6$		$z_6$	
$x_0$	$\cos \varphi_{40}$	$-\sin \varphi_{40}$	0	$l_{AB}$	$x_4$	1	0	0	0	$x_5$	$\cos \varphi_{65}$	0	$\sin \varphi_{65}$	0			
$y_0$	$\sin \varphi_{40}$	$\cos \varphi_{40}$	0	$l_{CD}$	$y_4$	0	$\cos \varphi_{54}$	$-\sin \varphi_{54}$	0	$y_5$	0	1	0	0			
$z_0$	0	0	1	$l_{BC}$	$z_4$	0	$\sin \varphi_{54}$	$\cos \varphi_{54}$	0	$z_5$	$-\sin \varphi_{65}$	0	$\cos \varphi_{65}$	0			
	0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1			

В результате перемножения матриц в соответствии с формулой (4.13) получают искомые координаты:

$$x_{F_0} = l_{EF}(\cos \varphi_{40} \cos \varphi_{65} - \sin \varphi_{40} \sin \varphi_{54} \sin \varphi_{65}) + l_{DE}(-\sin \varphi_{40} \cos \varphi_{54}) + l_{AB};$$

$$y_{F_0} = l_{EF}(\sin \varphi_{40} \cos \varphi_{65} - \cos \varphi_{40} \sin \varphi_{54} \sin \varphi_{65}) + l_{DE}(\cos \varphi_{40} \cos \varphi_{54}) + l_{CD};$$

$$z_{F_0} = l_{EF}(\cos \varphi_{40} \cos \varphi_{54}) + l_{DE}(\sin \varphi_{54}) + l_{BC}.$$

Все расстояния и углы, входящие в уравнения координат, известны. Пояснений требует лишь угол  $\varphi_{40}$ . Судя по рис. 4.18, он равен  $\varphi_{43}$ . На этом задачу можно считать решённой. Скорости и ускорения получают дифференцированием уравнений координат.

#### 4.2.2.2 Случай замкнутой цепи

Этот случай рассматривается ниже на примере так называемой *карданной передачи* (рис. 4.22). Предлагаемая схема передачи применяется для привода управляемых колёс некоторых автомобилей. Звено 0 неизменно связано с корпусом автомобиля. Звено 3 составляет единое целое с колесом. Поворотом звена 4 изменяют направление движения автомобиля.

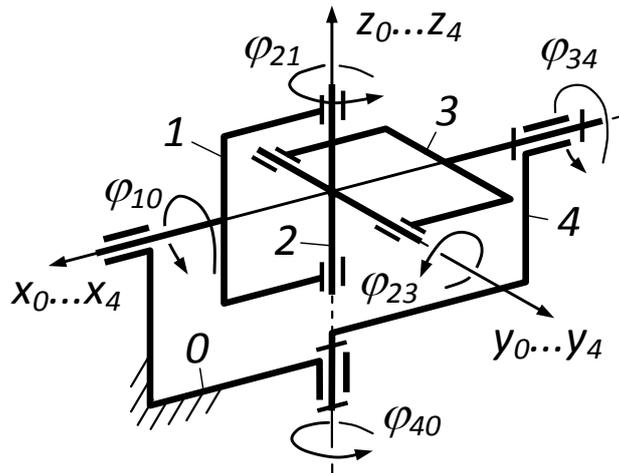


Рис. 4.22

Пусть требуется вывести зависимость угла поворота звена 3 от угла поворота звена 1. Сделать это нужно для повернутого положения звена 4, т. е. для случая, когда автомобиль движется по кривой.

Для решения задачи с каждым звеном механизма связывают одноимённую систему координат. Начала всех систем располагают в центре крестовины 2.

Где-нибудь в середине кинематической цепи, например на крестовине, выбирают произвольную безымянную точку. Координаты этой точки преобразуют из системы 2, принадлежащей крестовине, в систему 0. Преобразование выполняют двумя путями: через систему 1 и через 3, 4. Матричные уравнения преобразования выглядят при этом так:

$$R_0 = T_{10} T_{21} R_2; \quad R_0 = T_{40} T_{34} T_{23} R_2.$$

Возвращаясь к схеме, показывают положительные углы поворота систем координат соответственно направлению преобразования. Если координаты преобразуются, например из системы 2 в 3, как здесь требуется, то показывают угол  $\varphi_{23}$ , а не  $\varphi_{32}$ .

Из равенства левых частей уравнений преобразования вытекает:

$$T_{10}T_{21}=T_{40}T_{34}T_{23}. \tag{4.14}$$

Координаты начала каждой из систем относительно предыдущей равны нулю. Подставляя эти координаты в обычные уравнения преобразования (4.7)...(4.9), получают:

$$\begin{aligned} x_i &= x_j \cos(x_i \wedge x_j) + y_j \cos(x_i \wedge y_j) + z_j \cos(x_i \wedge z_j); \\ y_i &= x_j \cos(y_i \wedge x_j) + y_j \cos(y_i \wedge y_j) + z_j \cos(y_i \wedge z_j); \\ z_i &= x_j \cos(z_i \wedge x_j) + y_j \cos(z_i \wedge y_j) + z_j \cos(z_i \wedge z_j). \end{aligned}$$

Уравнения такого типа могут быть представлены в виде матричного произведения без добавления четвёртой строки. Это произведение показано ниже.

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_i \wedge x_j) & \cos(x_i \wedge y_j) & \cos(x_i \wedge z_j) \\ \cos(y_i \wedge x_j) & \cos(y_i \wedge y_j) & \cos(y_i \wedge z_j) \\ \cos(z_i \wedge x_j) & \cos(z_i \wedge y_j) & \cos(z_i \wedge z_j) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$$

В матрице преобразования остались только направляющие косинусы. Для каждого конкретного преобразования эти косинусы известны (см. матрицы, входящие в формулу 4.13). Результат перемножения матриц по уравнению (4.14) показан ниже.

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ \cos \varphi_{10} \cdot \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{10} \cdot \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{10} \cdot \sin \varphi_{21} & \sin \varphi_{10} \cdot \cos \varphi_{21} & \cos \varphi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{40} \cdot \cos \varphi_{23} - \sin \varphi_{40} \cdot \sin \varphi_{34} \cdot \sin \varphi_{23} & -\sin \varphi_{40} \cdot \cos \varphi_{34} & \cos \varphi_{40} \cdot \sin \varphi_{23} + \sin \varphi_{40} \cdot \sin \varphi_{34} \cdot \cos \varphi_{23} \\ \sin \varphi_{40} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varphi_{40} \cdot \sin \varphi_{34} \cdot \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{40} \cdot \cos \varphi_{34} & \sin \varphi_{40} \cdot \sin \varphi_{23} - \cos \varphi_{40} \cdot \sin \varphi_{34} \cdot \cos \varphi_{23} \\ -\cos \varphi_{34} \cdot \sin \varphi_{23} & \sin \varphi_{34} & \cos \varphi_{34} \cdot \cos \varphi_{23} \end{bmatrix}$$

Из равенства одноимённых элементов матриц можно получить девять уравнений. По условию задачи было бы достаточно одного, содержащего, во-первых, искомый угол  $\varphi_{34}$ , во-вторых, задаваемые углы  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{40}$ . Перебор всех возможных уравнений показывает, что такого нет. Есть два уравнения, содержащие нужные углы и один ненужный:

$$\sin \varphi_{10} \cos \varphi_{21} = \sin \varphi_{34}, \tag{4.15}$$

$$\cos \varphi_{10} \cos \varphi_{21} = \cos \varphi_{40} \cos \varphi_{34}. \tag{4.16}$$

Элементы матриц, порождающие эти уравнения, обведены жирной линией. Сначала выписаны обведённые элементы третьей строки, затем – второй. Ненужным в уравнениях является угол  $\varphi_{21}$ . Чтобы избавиться от него, первое уравнение делят на второе. После деления получают:

$$\operatorname{tg} \varphi_{10} \cos \varphi_{40} = \operatorname{tg} \varphi_{34}. \quad (4.17)$$

Угол  $\varphi_{34}$  определяют через  $\operatorname{arctg}$  или  $\operatorname{arctg} + \pi$ , в зависимости от знака ( $\operatorname{sign}$ ) синуса и косинуса угла  $\varphi_{34}$ .

При реальных значениях углов  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{40}$  (не более  $\pm 90^\circ$ ) косинусы этих углов всегда положительные. С учётом этого, из уравнений (4.15) и (4.16) находят:

$$\operatorname{sign} \sin \varphi_{34} = \operatorname{sign} \sin \varphi_{10};$$

$$\operatorname{sign} \cos \varphi_{34} = \operatorname{sign} \cos \varphi_{10}.$$

Согласно уравнениям, знак синуса от  $\varphi_{34}$  совпадает со знаком синуса от  $\varphi_{10}$ , а знак косинуса от  $\varphi_{34}$  совпадает со знаком косинуса от  $\varphi_{10}$ .

### 4.2.3 Методы синтеза

#### 4.2.3.1 Метод интерполяции

Пусть график требуемой функции положения  $\psi(\varphi)$  шарнирного четырёхзвенника (рис. 4.23, а) имеет вид  $T$  (рис. 4.23, б).

Воспроизведение требуемой функции положения возможно только в нескольких точках. Чтобы решить вопрос об их числе, механизм пересекают двумя диагональными прямыми. Воображают, что точка пересечения прямых является вершиной пирамиды, а рассматриваемый механизм – её основанием. Рассекая пирамиду плоскостью, параллельной основанию, получают четырёхугольник, подобный основанию. Разместив в углах четырёхугольника шарниры, получают четырёхзвенник, геометрически подобный исходному и с такой же функцией положения.

Поскольку абсолютные размеры звеньев не имеют значения, то одним из этих размеров можно задаться произвольно. Функцию положения будут определять три другие. Для определения трёх неизвестных необходимо иметь три уравнения. Их получают

подстановками (в неизвестную пока функцию положения) координат трёх точек, произвольно выбранных на кривой  $T$ . На рисунке это точки  $T_1, T_2, T_3$ .

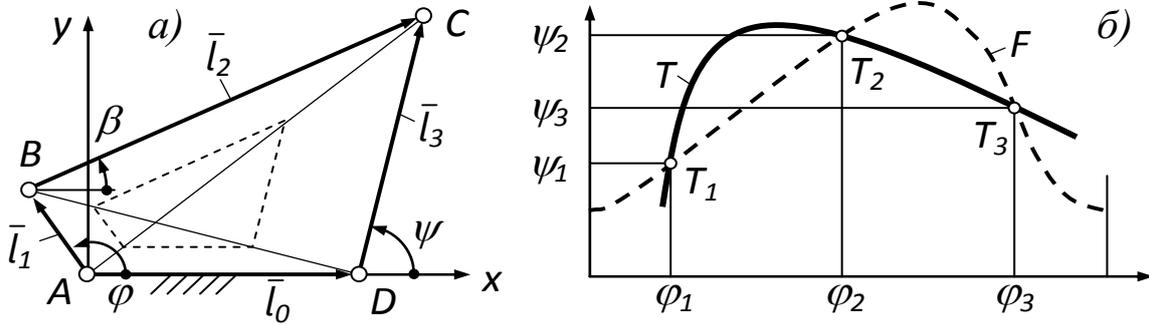


Рис. 4.23

Чтобы вывести функцию положения, формируют замкнутый векторный контур  $ABCD$ . Составляют уравнение замкнутости контура и уравнения его проекций:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 - l_3 - l_0 &= 0; \\ l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \beta - l_3 \cos \psi - l_0 &= 0; \\ l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \beta - l_3 \sin \psi - 0 &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнений проекций исключают  $\beta$ . Полученное приводят к виду

$$-2l_0l_1 \cos \varphi - 2l_1l_3 \cos \varphi - \psi + 2l_0l_3 \cos \psi + l_1^2 + l_3^2 + l_0^2 - l_2^2 = 0. \quad (4.18)$$

Длину стойки  $l_0$  принимают за единицу и делят уравнение (4.18) на  $2l_1l_3$ . В результате деления получают:

$$-\cos \varphi \frac{1}{l_3} + \cos \psi \frac{1}{l_1} + \frac{l_1^2 + l_3^2 + 1 - l_2^2}{2l_1l_3} = \cos \varphi - \psi. \quad (4.19)$$

Вводят обозначения:  $\frac{1}{l_3} = x_1$ ;  $\frac{1}{l_1} = x_2$ ;  $\frac{l_1^2 + l_3^2 + 1 - l_2^2}{2l_1l_3} = x_3$ .

Координаты точек  $T_1, T_2, T_3$  функции положения подставляют в уравнение (4.19). С учётом принятых обозначений получают линейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} -\cos \varphi_1 x_1 + \cos \psi_1 x_2 + x_3 &= \cos \varphi_1 - \psi_1; \\ -\cos \varphi_2 x_1 + \cos \psi_2 x_2 + x_3 &= \cos \varphi_2 - \psi_2; \\ -\cos \varphi_3 x_1 + \cos \psi_3 x_2 + x_3 &= \cos \varphi_3 - \psi_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты при  $x_3$  везде равны единице. Эта особенность системы позволяет легко исключить  $x_3$  и свести задачу к двум не-

известным. Чтобы это сделать, из первого уравнения вычитают второе, а из второго – третье. В результате вычитания получают:

$$-\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 x_1 + \cos \psi_1 - \cos \psi_2 x_2 = \cos \varphi_1 - \psi_1 - \cos \varphi_2 - \psi_2 ;$$

$$-\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3 x_1 + \cos \psi_2 - \cos \psi_3 x_2 = \cos \varphi_2 - \psi_2 - \cos \varphi_3 - \psi_3 .$$

Теперь уравнения содержат только два неизвестных –  $x_1, x_2$ . Найдя их, обращаются к одному из уравнений предыдущей системы и находят  $x_3$ . После этого определяют  $l_1, l_2, l_3$  (см. обозначения для  $x$ ). Найденное будет представлять собой размеры звеньев относительно стойки, т. к. её длина принята за единицу. Если, например, будет получено, что  $l_1 = 0,4$ , то это значит, что  $l_1$  составляет 0,4 от длины стойки.

Фактическая функция положения  $F$  (см. рис. 4.23, б) неизбежно будет отличаться от требуемой, но в заданных точках  $T_1, T_2, T_3$  будет совпадать с ней абсолютно точно.

#### 4.2.3.2 Другие методы синтеза

Интерполяция – это простейший *метод приближения функций*. В данном случае речь идёт о приближении фактической функции  $F$  к требуемой  $T$ . Точки  $T_1, T_2, T_3$  называются узлами интерполирования. Изменяя положение узлов, можно добиться лучшего приближения.

В качестве критерия качества приближения может выступать, например, площадь, заключённая между требуемой кривой и фактической. Чем она меньше, тем лучше. Соответствующий математический аппарат называется *квадратическим приближением функций*.

Можно задать коридор, за пределы которого не должна выходить фактическая кривая. В этом случае применяется метод, называемый *наилучшим приближением*.

Теория приближения функций берёт начало от работ П. Л. Чебышева. Эти работы возникли из потребностей синтеза, в частности синтеза четырёхзвенника, шатунная точка которого двигалась бы по прямой.

Компьютеры сделали практически реализуемыми *оптимизационные методы синтеза*. Согласно одному из них – *методу случай-*

*ного поиска* – размеры звеньев назначаются случайно (это делает соответствующая компьютерная программа), пока не будет достигнут требуемый минимум *целевой функции*. В приведённом выше примере (см. рис. 4.23) в качестве таковой может выступать, например, наибольшая разность ординат фактической и требуемой функции положения.

Согласно другому методу – *методу направленного поиска* – на первом шаге размеры звеньев задаются случайно. Затем они уточняются, пока не будет достигнут минимум целевой функции.

Уточнение производится путём задания некоторого приращения длины звена. Если приращение уменьшает целевую функцию, то после перебора всех остальных звеньев и возвращения к исходному задаётся приращение в том же направлении. В противном случае направление приращения меняется на противоположное.

При двух искомых размерах – *параметрах синтеза* – график целевой функции подобен дну озера. По вертикали – глубина озера или целевая функция  $z$  (со знаком «минус»), по горизонтали – параметры синтеза  $x, y$ . Исследователь, ищущий минимум, подобен моряку, который шестом ищет, где глубже.

Программы поиска минимума целевой функции – *программы оптимизации* – строят так, чтобы они действовали подобно этому моряку. Совершенно очевидно, что достигнув первой наинизшей точки – *локального минимума*, нельзя быть уверенным, что рядом нет более глубокого места. Целью поиска является самое глубокое место – *глобальный минимум*.

Чтобы не принять локальный минимум за глобальный, пространство поиска исследуют сначала с помощью случайного поиска. Заканчивают синтез направленным поиском.

## 5 Силовой расчёт механизмов

### 5.1 Постановка задачи

В данном курсе силовой расчёт или, иначе, силовой анализ рассматривается только для плоских механизмов. Предполагается, что высшие пары заменены низшими и, следовательно, механизм приведён к рычажному виду. Расчёт ведётся по двумерной модели. Как правило, такая модель не содержит избыточных связей и механизм оказывается статически определимым. Предполагается также, что трение пренебрежимо мало.

Расчёт состоит в определении реакций связей в кинематических парах механизма по заданному движению (скорости и ускорению) одного из звеньев этого механизма.

При заданном движении величину одной из внешних сил не задают. Её определяют исходя из того, чтобы она, в совокупности с другими внешними силами, обеспечивала заданное движение. Для краткости незаданную внешнюю силу называют *уравновешивающей*. Она действительно является таковой по отношению ко всем прочим внешним силам и силам инерции во всей их совокупности.

Реакции связей существенно зависят от сил инерции. В свою очередь силы инерции зависят от ускорений, поэтому силовому расчёту предшествует кинематический анализ. Конечной целью этого анализа является определение ускорений центров масс и угловых ускорений звеньев. Ниже предполагается, что ускорения определены.

### 5.2 Силы инерции

Силы инерции каждого звена представляют сначала в виде главного вектора  $I$  и главного момента  $M$ . Их модули определяют по формулам

$$I = ma_S; \quad M = J_S \varepsilon,$$

где  $m$  – масса звена;  $a_S$  – ускорение центра масс;  $J_S$  – момент инерции звена относительно центра масс;  $\varepsilon$  – угловое ускорение звена. Главный вектор прикладывают к центру масс звена и направляют противоположно ускорению  $a_S$ , главный момент изображают круговой стрелкой, направленной противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ . Место стрелки на чертеже произвольное, обычно её проводят из центра масс звена.

Чтобы унифицировать силы, а именно, свести их только к векторам, избавляются от главного момента  $M$ . При  $I \neq 0$  это делают параллельным смещением вектора  $I$  на расстояние  $h = M/I$ . Направление смещения выбирают так, чтобы после смещения вектор  $I$  создавал относительно центра масс момент, совпадающий по направлению с удаляемым моментом. При  $I = 0$  главный момент представляют в виде пары сил  $I', I''$  с произвольным плечом  $h$ . При этом  $I' = M/h$ .

### 5.3 Методы силового расчёта

Первый метод – позвенный, состоит в том, что механизм разбивают на отдельные звенья. К каждому звену прикладывают три категории сил: внешние (для механизма) силы, реакции связей, силы инерции. Внешние силы делятся на: движущие – в форме вектора  $F_d$  или момента  $M_d$ ; силы полезного сопротивления, тоже в виде вектора  $F_{пс}$  или момента  $M_{пс}$ ; силы тяжести –  $G_1 \dots G_5$  (рис. 5.1, а). Реакции связей (активных) представляют двумя взаимно перпендикулярными составляющими  $R_{ij}^n, R_{ij}^\tau$  (рис. 5.1, б). Цифровой индекс в обозначении силы (тяжести или инерции) указывает номер звена приложения этой силы.

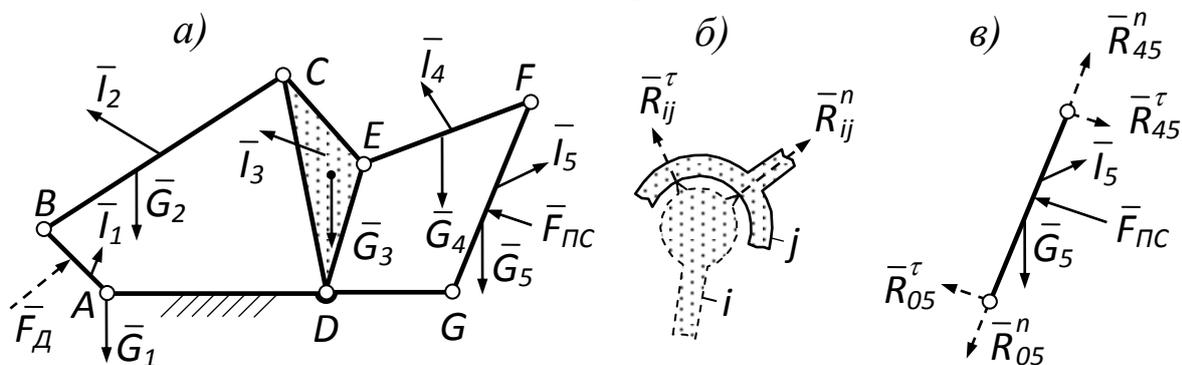


Рис. 5.1

На рис. 5.1, в показаны все три категории сил, приложенных к звену 5. Силы инерции представлены в безмоментной форме. Согласно принципу Даламбера, приложение сил инерции ко всем внешним силам и реакциям связей приводит любое звено в состояние равновесия. Совместно решая систему уравнений равновесия всех звеньев, находят реакции и незаданную внешнюю силу.

Совместное решение целесообразно только при машинном решении задачи.

Второй метод – погруппный, применяется при ручном графо-аналитическом решении задачи. Он состоит в том, что реакции определяют не для всех звеньев сразу, а лишь для отдельных групп этих звеньев. В выделенных группах число реакций должно быть равно числу уравнений равновесия.

Число реакций равно числу активных связей  $s$ , содержащихся во всех парах группы. Для произвольной системы сил число уравнений равновесия равно  $3n$ , где  $n$  – число звеньев группы. В итоге искомые группы должны удовлетворять условию  $s = 3n$ .

Такому условию удовлетворяют, как известно, группы Ассура. Однако не все они равноправны: начать расчёт можно только с последней из них. Объясняется это тем, что в число  $s$  не входят связи данной группы с последующей. С учётом таких связей число реакций оказывается больше, чем уравнений равновесия. Последняя группа имеет связи только с предшествующим механизмом, и только в ней число реакций равно числу уравнений равновесия. С этой группы и начинают расчёт.

По завершении расчёта последней группы внешние для неё реакции переходят с обратным знаком на предшествующий механизм, в частности, на предпоследнюю группу. После этого предпоследняя группа становится разрешимой, и расчёт продолжается. Последним рассчитывают звено с заданной внешней силой. Чтобы расчёт закончился именно на этом звене, оно должно быть выбрано в качестве начального при разложении на группы Ассура.

В приведённом выше примере (рис. 5.1, *a*) заданная внешняя сила (здесь и далее все неизвестные силы выделяются пунктиром) приложена к звену 1, следовательно, при силовом расчёте оно должно быть принято за начальное. При таком выборе цепь 2, 3 образуют первую группу Ассура, 4, 5 – вторую. В группе 2, 3 имеется восемь реакций (по две на шарнир), а независимых уравнений равновесия может быть составлено только шесть, следовательно, на начало расчёта эта группа неразрешима. В то же время в группе 4, 5 число реакций и независимых уравнений одинаковое, равное шести. С этой, т. е. последней, группы и начинают расчёт.

### 5.4 Пример погруппного силового расчёта

Пусть требуется определить реакции в кинематических парах шестизвенного механизма, показанного на рис. 5.2, а.

Схема вычерчена в определённом масштабе. Это значит, что все размеры доступны. Известны массы и моменты инерции звеньев. Задана скорость кривошипа 1. Эта скорость постоянна. Известна сила полезного сопротивления  $F_{\text{пс}}$  и силы тяжести  $G_1 \dots G_5$ . Последние определены через известные массы по формуле  $G = mg$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Движущий момент  $M_{\text{д}}$  не задан, чтобы не войти в противоречие с заданным движением.

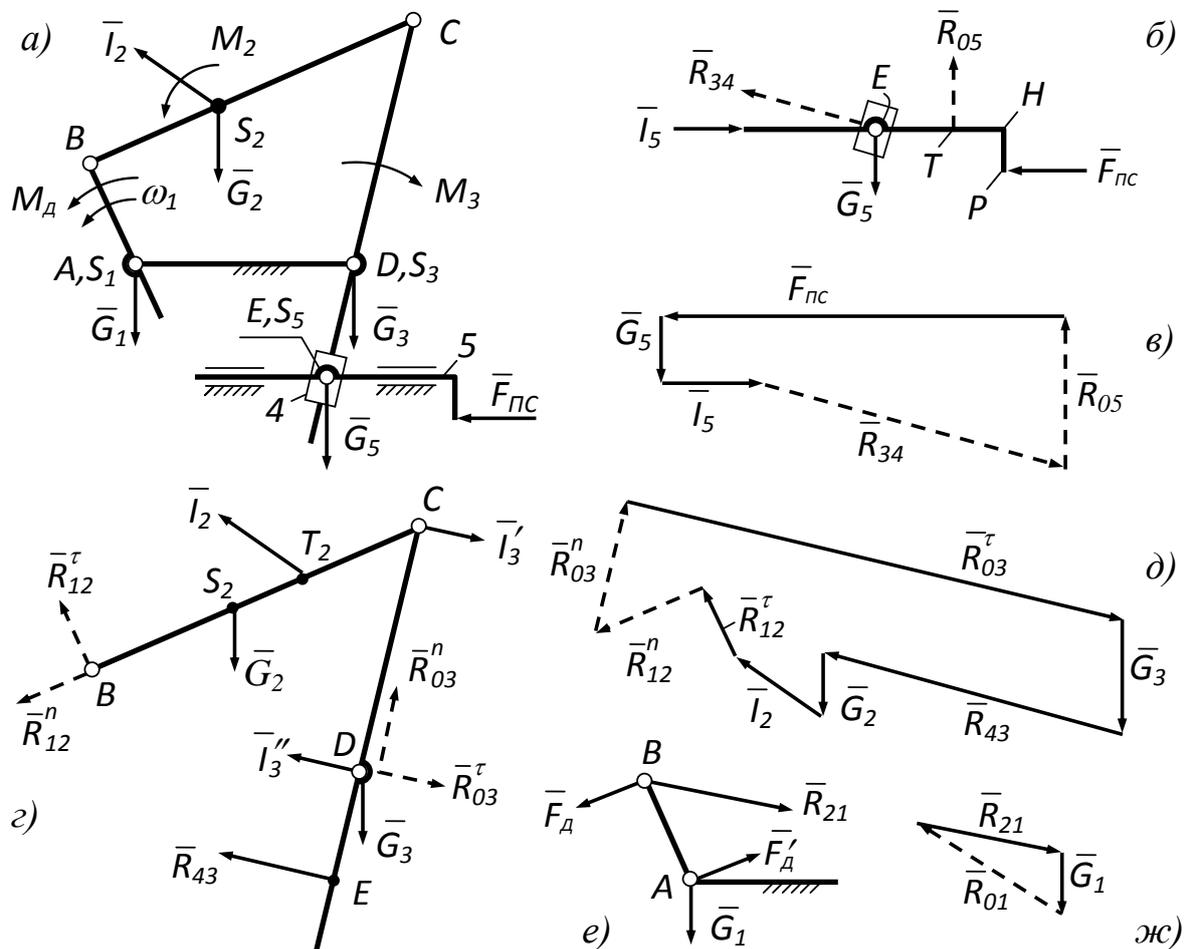


Рис. 5.2

Предполагается, что кинематический анализ уже произведён и определены главные векторы  $I_i$  и главные моменты  $M_i$  сил инерции всех звеньев. Причём,  $I_1$  и  $I_3$  равны нулю ввиду неподвижности центров масс  $S_1, S_2$  соответствующих звеньев;  $M_1$  равно нулю, т. к. равно нулю угловое ускорение звена 1;  $I_4$  и  $M_4$  равны нулю из-за

того, что масса и момент инерции звена 4 пренебрежимо малы. Силы инерции, подлежащие учёту, показаны на схеме механизма.

Звено 1 является начальным как при кинематическом анализе, так и при силовом расчёте. В обоих случаях первую группу Ассура образуют звенья 2, 3, вторую – звенья 4, 5.

#### 5.4.1 Расчёт группы 4, 5

Рассчитываемую группу отделяют от механизма и изображают отдельно (рис. 5.11, б). Положение звеньев группы не изменяют. Масштаб группы произвольный. К группе прикладывают внешние силы  $G_5$ ,  $F_{\text{пс}}$ , реакции  $R_{34}$ ,  $R_{05}$  и единственную силу инерции  $I_5$ . Масштаб сил на этом этапе расчёта не соблюдают.

Линию действия реакции  $R_{34}$  (звена 3 на звено 4) располагают перпендикулярно оси поступательной пары 3, 4, т. к. трения нет. Названную линию проводят через точку  $E$ . Это делают, исходя из следующего. Звено 4, как и вся группа, находится в равновесии. На звено 4 действуют только две силы –  $R_{34}$  и  $R_{54}$  ( $R_{34}$  действует изнутри звена 4,  $R_{54}$  – снаружи). Реакцию  $R_{54}$ , как и все внутренние силы группы 5, 4, не показывают. Если тело находится в равновесии под действием только двух сил, то они располагаются на одной прямой.  $R_{54}$  проходит через точку  $E$ , следовательно,  $R_{34}$  тоже проходит через точку  $E$ . Направление реакции на линии её действия указывают произвольно и рассматривают это направление как предварительное.

Активные связи стойки 0 с ползуном 5 можно считать расположенными в его опорах – по одной связи на каждую опору. Реакции этих связей представляют в виде равнодействующей  $R_{05}$ , перпендикулярной оси пары 0, 5 и приложенной в неизвестной пока точке  $T$ . Расстояние  $l_{ET}$  до точки  $T$  определяют наряду с реакциями.

При графо-аналитическом силовом расчёте уравнения равновесия записывают в виде суммы моментов  $\Sigma M = 0$  и в виде геометрической суммы сил  $\Sigma F = 0$ . Сначала определяют внешние реакции, затем внутренние. Уравнение моментов применяют обычно к отдельным звеньям, а уравнение геометрической суммы сил – к группе в целом. Уравнение сил как векторное позволяет найти сразу два неизвестных.

Это либо величины двух сил с известными линиями действия, либо величина и направление одной силы.

Рассматриваемая группа имеет три внешних неизвестных –  $R_{34}$ ,  $R_{05}$  и  $l_{ET}$ . Первые два определяют из геометрической суммы, которую записывают для группы в целом. Порядок сложения векторов не имеет значения. Полезно, однако, искомые реакции ставить в конец уравнения. Исходя из этого, получают:

$$F_{\text{пс}} + G_5 + I_5 + \underline{R_{34}} + \underline{R_{05}} = 0.$$

Неизвестные выделены чертой снизу. Графическое решение уравнения геометрической суммы называется планом сил. План сил строится в определенном масштабе. Масштабный коэффициент плана определяют, ориентируясь на самую большую из известных сил. Пусть это будет  $F_{\text{пс}}$ . Тогда, задавшись отрезком  $\langle F_{\text{пс}} \rangle$ , получают:  $\mu_F = F_{\text{пс}} / \langle F_{\text{пс}} \rangle$ .

Построив цепь из первых трёх сил, через конец вектора  $I_5$  проводят линию действия реакции  $R_{34}$  (рис. 5.2, в). При нулевой сумме последнее слагаемое должно приходиться в начало первого. На этом основании линию действия вектора  $R_{05}$  проводят через начало вектора  $F_{\text{пс}}$ . На пересечении линий действия находят конец вектора  $R_{34}$  и начало  $F_{\text{пс}}$ . Истинные значения реакций находят через масштабный коэффициент  $\mu_F$ .

Направления искомых сил удобно определять по следующему правилу: *если геометрическая сумма сил равна нулю, то искомые силы оказываются попутными обходу векторного контура в направлении известных сил*. Применяя это правило к построенному плану сил, находят, что направления векторов  $R_{34}$  и  $R_{05}$  определены верно.

Направление силы  $R_{34}$ , принятое на схеме группы, не подтвердилось. Не следует, однако, перерисовывать эту силу, т. к. после исправления уравнения равновесия не будут соответствовать схеме сил, и это затруднит поиск ошибок, если они возникнут.

Расстояние  $l_{ET}$  можно определить только из суммы моментов. Сумма моментов относительно точки  $E$  имеет вид:

$$F_{\text{пс}} l_{PH} - R_{05} l_{ET} = 0.$$

Отсюда:  $l_{ET} = l_{PH} \frac{F_{nc}}{R_{05}}$ . В данном случае  $l_{ET}$  получается положительным, что подтверждает принятое положение точки  $T$  относительно  $E$ . Отрицательный ответ означал бы, что точка  $T$  расположена слева от  $E$ .

Внутренняя реакция  $R_{54}$  равна и противоположна  $R_{34}$ . Последняя известна. На этом расчёт группы 4, 5 закончен.

#### 5.4.2 Расчёт группы 2, 3

Внешними силами данной группы являются  $G_2$  и  $G_3$  (рис. 5.11,  $z$ ). Реакция  $R_{43}$  равна и противоположна уже известной  $R_{34}$  (см. план сил группы 4, 5). Чтобы подчеркнуть, что на данном этапе  $R_{43}$  не является искомой, её изображают сплошной линией. Положение точки  $E$  определяют по схеме механизма.

Реакции в шарнирах  $B$  и  $D$  представляют в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих, направленных вдоль и поперёк соответствующего звена. Продольную составляющую называют нормальной, поперечную – тангенциальной.

Силы инерции представляют в безмоментной форме. При этом  $I_2$  проходит через некоторую точку  $T_2$ , а  $M_3$  представляют парой  $I'_3, I''_3$ , найденной как  $M_3/l_{CD}$ .

На начало расчёта имеются четыре неизвестных:  $R_{12}^n, R_{12}^t, R_{03}^n, R_{03}^t$ . Сначала определяют тангенциальные составляющие. Для этого используют уравнения моментов относительно точки  $C$ . Для сил, действующих на звено 2, уравнение моментов имеет вид:

$$-R_{12}^t l_{BC} + G_2 h_{G_2} - I_2 h_{I_2} = 0.$$

Буквой  $h$  с соответствующим индексом обозначены плечи сил. Их значения снимают с чертежа. Чтобы не перегружать рисунок, плечи не показаны. Из уравнения моментов находят реакцию  $R_{12}^t$ . Если она получится со знаком «минус», то это значит, что истинное направление данной реакции противоположно принятому. Чтобы это не забылось, на реакции ставят какую-нибудь метку, например крестик.

Для сил, действующих на звено 3, уравнение моментов относительно точки  $C$  имеет вид:

$$-R_{03}^{\tau} l_{CD} - G_3 h_{G_3} + I_3' l_{CD} + R_{43} l_{CE} = 0.$$

Отсюда находят  $R_{03}^{\tau}$ . Нормальные составляющие находят из геометрической суммы сил, действующих на группу в целом. Сначала перечисляют силы, действующие на звено 3, затем на звено 2. Можно и наоборот. Неизвестные оставляют на конец уравнения. Необходимо позаботиться также о том, чтобы нормальные и тангенциальные составляющие реакции одного и того же звена оказались на будущем плане сил рядом. С учётом всех этих рекомендаций получают:

$$R_{03}^{\tau} + G_3 + R_{43} + G_2 + I_2 + R_{12}^{\tau} + \underline{R_{12}^n} + \underline{R_{03}^n} = 0.$$

С помощью плана сил (рис. 5.2, д) находят реакции  $R_{12}^n, R_{03}^n$ . Складывая геометрически  $R_{12}^n$  и  $R_{12}^{\tau}$ , находят равнодействующую  $R_{12}$ . Равнодействующую не показывают, чтобы не усложнять рисунок. Внутреннюю реакцию  $R_{23}$  или, наоборот,  $R_{32}$  находят из геометрической суммы сил, действующих, соответственно, на звено 3 или 2. Остановившись на звене 3, получают:

$$R_{03}^n + R_{03}^{\tau} + G_3 + R_{43} + \underline{R_{23}} = 0.$$

С помощью этого уравнения можно определить  $R_{23}$ . Однако для этого не обязательно строить ещё один план сил. Как отмечено выше, в предыдущем уравнении сначала перечисляются силы, действующие только на звено 3, затем только на звено 2. Замыкая цепь сил, действующих на звено 3, получают вектор  $R_{23}$ . На этом расчёт группы 2, 3 закончен.

#### 5.4.3 Расчёт начального механизма

Из трёх категорий сил, которые необходимо приложить к звену 1, показывают сначала реакцию  $R_{21}$  (рис. 5.2, е). Она равна и противоположна известной реакции  $R_{12}$ . Движущий момент  $M_d$  представляют парой сил  $F_d - F_d'$  с плечом  $AB$ . После приложения реакции  $R_{21}$  направление пары становится очевидным, т. к.  $G_1$  не создаёт момента относительно точки  $A$ , а силы инерции звена 1 равны нулю. Приложение сил заканчивают реакцией  $R_{01}$ , которую подразумевают, но не изображают. Эта реакция проявится в результате решения задачи.

Из двух неизвестных –  $F_d$  и  $R_{01}$  определяют сначала  $F_d$ . Для этого составляют уравнение моментов относительно точки  $A$ :  $-F_d l_{AB} + R_{21} h_{21} = 0$ . Из него находят  $F_d$ .  $R_{01}$  определяют из геометрической суммы  $R_{21} + G_1 + R_{01} = 0$ . Результат показан на плане сил (рис. 5.2, ж). На этом силовой расчёт закончен. Расчёт проверяют с помощью теоремы Жуковского.

#### 5.4.4 Теорема Жуковского

Теорема: «Если силу, приложенную к какой-либо точке механизма, перенести параллельно самой себе в одноименную точку плана скоростей, повернутого на  $90^\circ$  в произвольном направлении, то момент силы относительно полюса плана будет пропорционален её мощности». Говоря об одноименной точке, подразумевают систему обозначений, которой пользовались выше. Теорема доказывается ниже на примере силы тяжести  $G$ , приложенной к точке  $S$  некоторого вращающегося звена  $AS$  (рис. 5.3).

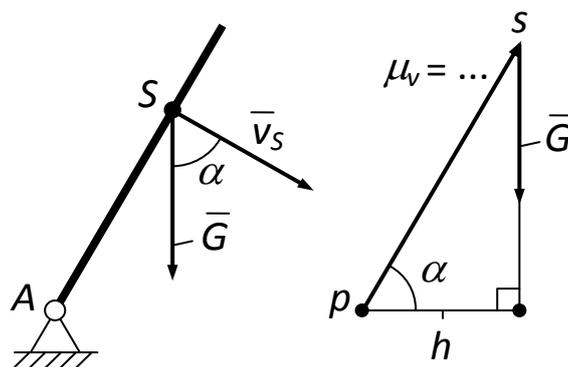


Рис. 5.3

На повернутом плане скорость точки  $S$  изображает вектор  $ps$ , параллельный  $AS$ .  $\mu_v$  – масштабный коэффициент плана. Сила  $G$ , перенесенная параллельно себе в точку  $s$  плана, имеет относительно полюса  $p$  плечо  $h$ . По взаимной перпендикулярности сторон угол  $\alpha$  между плечом  $h$  и вектором  $ps$  равен одноименному углу между силой  $G$  и скоростью  $v_S$ . Момент силы  $G$  относительно полюса определяется следующей цепочкой формул:

$$M_G = G h = G ps \cos \alpha = G \frac{v_S}{\mu_v} \cos \alpha.$$

Поскольку  $G v_S \cos \alpha$  есть мощность  $N_G$  силы  $G$ , то  $M_G = N_G \frac{1}{\mu_v}$ , т. е. момент пропорционален мощности, что и требовалось доказать.

### 5.4.5 Проверка силового расчёта

Пусть по теореме Жуковского требуется проверить расчёт, который рассмотрен выше. Расчётная схема механизма повторена на (рис. 5.4, а). Согласно общему уравнению динамики, мгновенная мощность всех внешних сил механизма и сил инерции его звеньев равна нулю. Полагая, что названные силы приведены к безмоментной форме, получают следующее уравнение мощностей:

$$N_D + N_{G_2} + N_{I_2} + N_{I_3} + N_{I_5} + N_{\text{пс}} = 0.$$

Внешние силы и силы инерции переносят со схемы механизма в одноимённые точки повернутого плана скоростей (рис. 5.4, б).

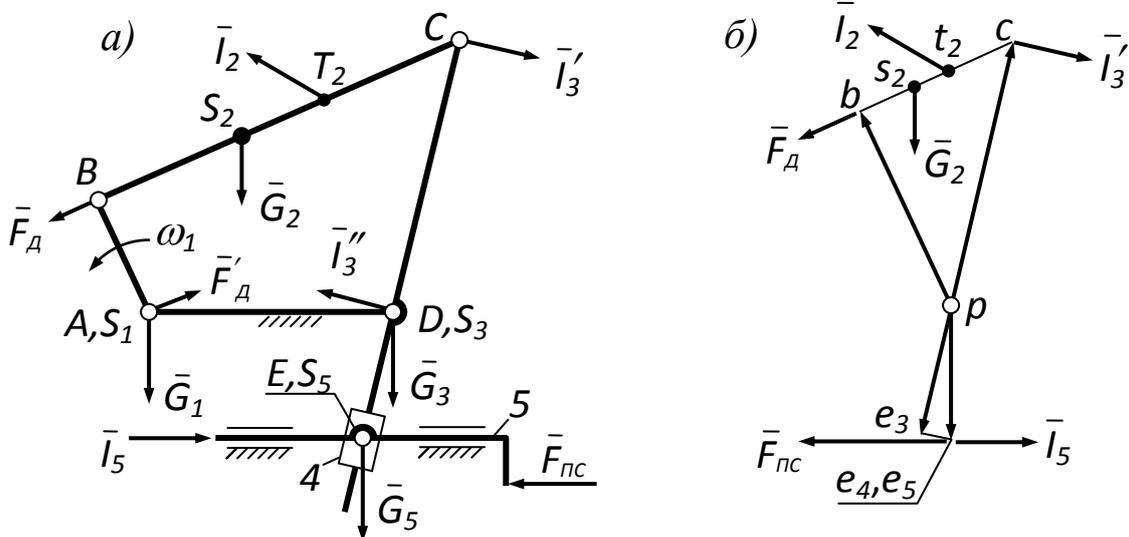


Рис. 5.4

Левую и правую части уравнения мощностей делят на масштабный коэффициент плана скоростей. Согласно теореме Жуковского, мощность каждой силы превращается в её момент относительно полюса, а уравнение мощностей превращается в уравнение моментов:

$$-F_D pb - G_2 h_{G_2} - I_2 h_{I_2} + I'_3 pc - I_5 pe_5 + F_{\text{пс}} pe_5 = 0.$$

Из уравнения моментов определяют  $F_D$ , обозначаемое далее как  $F_D^*$ . Если всё правильно, то  $F_D^*$  должно быть равно  $F_D$ , найденному через реакции. В этом и состоит проверка.

На рис. 5.4 план скоростей выступает как твёрдое тело, подвешенное шарнирно за полюс и находящееся в равновесии под действием приложенных сил. В связи с этим названный план называется *рычагом Жуковского*.

## 6 Динамика машин

Основная задача динамики машин состоит в определении закона движения машины по заданным внешним силам.

Как и при силовом расчёте, ниже предполагается, что механизм, составляющий основу исследуемой машины, плоский и имеет одну степень свободы. После замены высших пар низшими механизм приведен к рычажному виду. Звенья механизма абсолютно твердые. Силы трения отсутствуют.

### 6.1 Приведение сил и масс

Решение динамической задачи облегчается, если сложную систему сил и масс заменить или, как говорят, привести к более простой. В механизмах с одной степенью свободы возможно приведение системы к одной силе и одной массе. Звено приложения заменяющей силы и массы называется звеном приведения. В качестве такового выбирают то звено, закон движения которого необходимо определить в первую очередь.

#### 6.1.1 Приведение сил и масс

##### при постоянных передаточных отношениях

Постоянные передаточные отношения характерны в основном для зубчатых механизмов. На рис. 6.1, а изображён реечный механизм, входящий в состав поршневого привода. Привод содержит два подвижных звена: одно с поступательным движением, другое с вращательным. Передаточное отношение  $v/\omega$  постоянное. Привод находится под действием движущей силы  $F_d$  и момента полезного сопротивления  $M_{пс}$ .

Если звено приведения совершает поступательное движение, то всё сводится к *приведённой массе*  $m_{п}$ , находящейся под действием *приведённой силы*  $F_{п}$  (рис. 6.1, б).

При вращательном движении звена приведения заменяющую силу представляют в виде *приведённого момента*  $M_{п}$ , а заменяющую массу характеризуют *приведённым моментом инерции*  $J_{п}$  (рис. 6.1, в).

Приведённую силу и приведённый момент направляют *предварительно* по ходу звена приведения. Истинное направление уста-

навливают расчётом. После замены масс подвижные звенья механизма становятся как бы пустотелыми и их можно отбросить. Остающаяся заменяющая сила и заменяющая масса образуют *одномассовую динамическую модель механизма*. Величины  $F_{\Pi}$ ,  $m_{\Pi}$  и  $M_{\Pi}$ ,  $J_{\Pi}$  называются приведёнными характеристиками механизма.

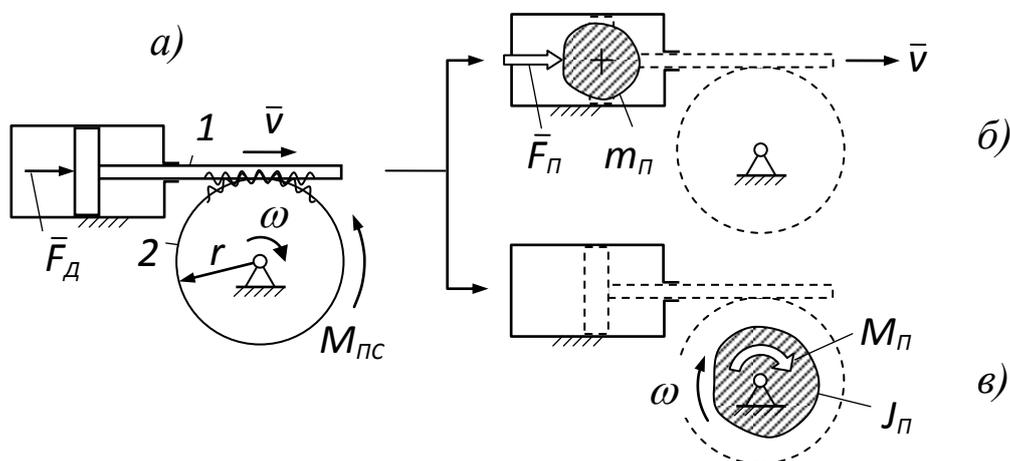


Рис. 6.1

Правила приведения сил и масс. При любых преобразованиях сил и масс должен выполняться закон сохранения энергии. А это значит, во-первых, что *работа приведённой силы  $F_{\Pi}$  (или, в зависимости от вида движения звена приведения, работа приведённого момента  $M_{\Pi}$ ) на каждом элементарном перемещении механизма должна быть равна работе приводимых сил*. Во-вторых, мгновенная кинетическая энергия машины до приведения масс и после должна быть одной и той же. Другими словами, *мгновенная кинетическая энергия заменяющей массы должна быть равна кинетической энергии всех подвижных звеньев механизма*. Это и есть правила приведения сил и масс.

При графических методах расчёта удобнее пользоваться равенством не работ, а мощностей. Равенство мощностей получается из равенства работ путём деления последнего на время перемещения. В результате правило приведения сил формулируется так: *сила  $F_{\Pi}$  или момент  $M_{\Pi}$  должны быть такими, чтобы их мгновенная мощность была равна мгновенной мощности всех приводимых сил*.

Мощность  $N_F$  какой-либо силы  $F$  определяется по формуле  $N_F = Fv \cos(F \wedge v)$ , где  $v$  – скорость точки приложения силы;  $F \wedge v$  – угол между силой и скоростью.

Для момента  $M$  мощность  $N_M = \pm M\omega$ , где  $\omega$  – угловая скорость звена приложения момента. Знак «плюс» ставится, если момент и скорость направлены в одну и ту же сторону.

Приведение сил и масс к звену 1 (см. рис. 6.1, б). Пусть под действием силы  $F_d$  и момента  $M_{\text{пс}}$  звенья 1, 2 имеют в данный момент скорости  $v$  и  $\omega$ , соответственно;  $m$  – масса звена 1;  $J$  – момент инерции звена 2;  $r$  – радиус центроиды колеса. Чтобы привести силы, составляют равенство мощностей приведённой и приводимых сил привода:  $F_{\text{п}} v = F_d v + (-M_{\text{пс}} \omega)$ .

Мощность момента полезного сопротивления взята со знаком «минус», т. к. этот момент направлен против скорости звена приложения. Из равенства мощностей находят:  $F_{\text{п}} = F_d - M_{\text{пс}} \frac{\omega}{v}$ .

Поскольку  $v = \omega r$ , то  $F_{\text{п}} = F_d - \frac{M_{\text{пс}}}{r}$ .

При вычислениях по данной формуле все величины берут по модулю. Если сила  $F_{\text{п}}$  получится отрицательной, то это значит, что предположение о её направлении по скорости звена приведения не подтвердилось.

Для приведения масс составляют равенство кинетических энергий приведённой и приводимых масс:  $m_{\text{п}} \frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + J \frac{\omega^2}{2}$ . Отсюда  $m_{\text{п}} = m + \frac{J}{r^2}$ . Судя по формуле,  $m_{\text{п}}$  – величина постоянная.

Приведение сил и масс к звену 2 (см. рис. 6.1, в и а). Уравнения мощностей и кинетических энергий в этом случае имеют вид:  $M_{\text{п}}\omega = F_d v - M_{\text{пс}} \omega$ ;  $J_{\text{п}} \frac{\omega^2}{2} = m \frac{v^2}{2} + J \frac{\omega^2}{2}$ . Правые части уравнений такие же, как в предыдущем случае. Из уравнений выводят:  $M_{\text{п}} = -M_{\text{пс}} + F_d r$ ;  $J_{\text{п}} = J + mr^2$ . Величина  $J_{\text{п}}$  тоже постоянна.

Анализируя формулы приведения, например две последние, можно заметить, что сила  $F_d$  при её приведении домножается на передаточное отношение, а масса  $m$  – на квадрат передаточного отношения (в роли передаточного отношения выступает радиус  $r$ ). Руководствуясь этой закономерностью, можно сразу записывать соответствующие выражения.

Физическое представление о величине заменяющей силы и массы можно составить с помощью следующего мысленного эксперимента. Удерживая руками звено приведения в неподвижном состоянии, к механизму прикладывают все его внешние силы. То, что воспримут после этого руки, есть приведённая сила  $F_{\Pi}$  или приведённый момент  $M_{\Pi}$  – в зависимости от того, за какое звено взялись. При покачивании звена приведения из стороны в сторону, руки будут воспринимать результирующее действие сил инерции всех подвижных масс механизма. Это действие есть инерционность  $m_{\Pi}$  или  $J_{\Pi}$  заменяющей массы.

### 6.1.2 Приведение сил и масс при переменных передаточных отношениях

Переменные передаточные отношения характерны в основном для рычажных механизмов. Пусть звеном приведения является кривошип  $AB$  механизма, изображённого на рис. 6.2, *a*. Приведение к вращающемуся звену означает замену сил на момент  $M_{\Pi}$  и замену масс на тело с моментом инерции  $J_{\Pi}$ .

#### 6.1.2.1 Приведение сил по уравнению мощностей

Приводимыми силами являются: движущий момент  $M_{\text{д}}$ , сила полезного сопротивления  $F_{\text{пс}}$  и силы тяжести  $G_1 \dots G_5$  звеньев  $1 \dots 5$ , соответственно. Силы тяжести приложены к центрам масс  $S_1 \dots S_5$ . Масса кулисного камня  $4$  предполагается пренебрежимо малой, поэтому сила его тяжести не показана.

Мощность момента  $M_{\Pi}$  должна быть равна мощности всех приводимых сил. На этом основании составляют уравнение:

$$M_{\Pi} \omega_1 = M_{\text{д}} \omega_1 + G_2 v_{S_2} \cos \alpha - F_{\text{пс}} v_E.$$

Силы  $G_1$  и  $G_3$  не вошли в уравнение потому, что скорости точек приложения этих сил равны нулю;  $G_5$  не вошла потому, что действует под прямым углом к скорости точки приложения, косинус такого угла равен нулю. Мощность силы  $F_{\text{пс}}$  отрицательна, т. к. направлена против скорости точки приложения. Эта точка имеет скорость шарнира  $E$ . Из равенства мощностей получают:

$$M_{\Pi} = M_{\text{д}} + G_2 \frac{v_{S_2}}{\omega_1} \cos \alpha - F_{\text{пс}} \frac{v_E}{\omega_1}.$$

Линейные скорости, входящие в выражение момента  $M_{\Pi}$ , берут из плана скоростей. Чтобы исключить угловые скорости, их выражают через соответствующие линейные. Угол  $\alpha$  между силой и скоростью снимают с чертежа.

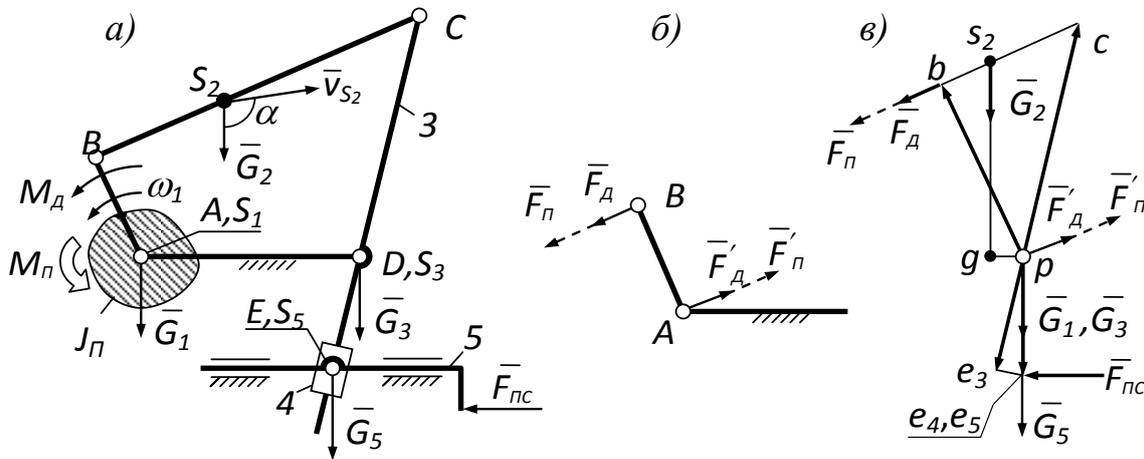


Рис. 6.2

### 6.1.2.2 Приведение сил по теореме Жуковского

Чтобы привести силы по теореме Жуковского, их представляют в безмоментной форме. В частности, полагают, что моменты  $M_d$ ,  $M_{\Pi}$  создаются парами сил  $F_d - F'_d$  и  $F_{\Pi} - F'_{\Pi}$  с плечом  $AB$  (рис. 6.2, б). Эти и другие внешние силы переносят в одноимённые точки повернутого плана скоростей (рис. 6.2, в).

По правилам приведения сил мощность приведённой пары  $F_{\Pi} - F'_{\Pi}$  должна быть равна мощности всех приводимых сил. В то же время, по теореме Жуковского, мощность силы пропорциональна её моменту относительно полюса. Из всего этого следует, что на плане скоростей момент приведённой пары должен быть равен сумме моментов всех приводимых сил. Учитывая, что силы, проходящие через полюс, не создают момента, получают уравнение:

$$F_{\Pi} pb = F_d pb + G_2 pg - F_{\Pi c} pe_5 .$$

Из этого уравнения находят  $F_{\Pi}$ . Положительное  $F_{\Pi}$  подтверждает принятое направление силы, отрицательное – отвергает его. Перенеся пару  $F_{\Pi} - F'_{\Pi}$  с плана скоростей на схему механизма, находят величину и направление момента  $M_{\Pi}$ . Момент, направленный по скорости звена приведения, считается положительным.

### 6.1.2.3 Приведение масс

Согласно правилу приведения, кинетическая энергия заменяющей массы должна быть равна кинетической энергии всех подвижных звеньев. Пренебрегая массой и моментом инерции звена 4, из равенства кинетических энергий последовательно получают:

$$J_{\Pi} \frac{\omega_1^2}{2} = J_{1S} \frac{\omega_1^2}{2} + m_2 \frac{v_{S2}^2}{2} + J_{2S} \frac{\omega_2^2}{2} + J_{3S} \frac{\omega_3^2}{2} + m_5 \frac{v_E^2}{2};$$

$$J_{\Pi} = J_{1S} + m_2 \frac{v_{S2}^2}{\omega_1^2} + J_{2S} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + J_{3S} \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} + m_5 \frac{v_E^2}{\omega_1^2}.$$

Угловые скорости выражают через линейные, а именно:

$$\omega_1 = \frac{v_B}{l_{AB}}; \omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{CB}}; \omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}}.$$

После подстановок получают:

$$J_{\Pi} = J_{1S} + m_2 \frac{v_{2S}^2}{v_B^2} l_{AB}^2 + J_{2S} \frac{v_{CB}^2}{v_B^2} \frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2} + J_{3S} \frac{v_C^2}{v_B^2} \frac{l_{AB}^2}{l_{CD}^2} + m_5 \frac{v_E^2}{v_B^2} l_{AB}^2.$$

Для упрощения расчётов отношения скоростей, стоящие в скобках, заменяют на отношения отрезков, изображающих скорости на плане скоростей. Отношения скоростей не зависят от закона движения механизма, поэтому скорость точки  $B$  можно принять произвольно. Приведение сил и масс упрощается, если эту скорость считать постоянной.

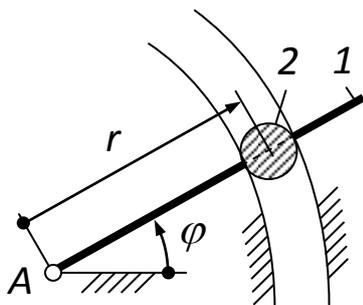


Рис. 6.3

В отличие от исследованного выше поршневого привода (рис. 6.1, в), приведенный момент инерции рычажного механизма получается переменным, различным в разных положениях механизма. Было бы неправильно представлять, что эта переменность обеспечивается путем установки на звено 1 (рис. 6.2, а) массы, обладающей каждый раз новым моментом инерции. Неправильно потому, что это была бы динамика тела с переменной массой. Правильная динамическая модель представляет собой не одно тело, а механизм, состоящий из кулисы 1 и постоянной точечной массы 2 (рис. 6.3). Масса скользит по кулисе и криволинейному пазу, принадлежащему стойке. Требуемый закон изменения момента инерции  $J_{\Pi}(\varphi)$  в такой модели обеспечивается надлежащей формой паза, т. е. зависимостью  $r(\varphi)$ . Для простоты рисунка далее используется прежнее изображение модели.

## 6.2 Определение скорости звена приведения

### 6.2.1 Скорость из уравнения кинетической энергии

Пусть внешние силы машины *зависят только от положения* звеньев или постоянны. Таковыми можно считать силы давления газов в поршневых машинах, силы пружин в кулачковых механизмах, силы тяжести. При некоторой идеализации сюда же можно отнести силы полезного сопротивления некоторых технологических машин, например, силы резания, штамповки, выдавливания.

Для определённости объекта рассматривается механизм, показанный на рис. 6.2. Предполагается, что закон изменения внешних сил известен на всём протяжении работы машины, т. е. от пуска до остановки; звено приведения машины – кривошип  $I$ , совершает вращательное движение. Требуется определить закон движения звена приведения в виде зависимости  $\omega(\varphi)$ , т. е. зависимости скорости от положения или, иначе, от координаты (здесь и далее, индекс  $I$  при координате и скорости звена приведения опускается).

**Решение задачи.** По известным внешним силам строят график приведенного момента  $M_{\text{п}}(\varphi)$  внешних сил. Для этого ось  $\varphi$  графика разбивают на  $n$  интервалов и вычисляют  $M_{\text{п}}$  для каждого  $\varphi$ . В условиях решаемой задачи необходимо предположить, что силы полезного сопротивления начинают действовать лишь после того, как звено приведения сделает несколько оборотов и наберёт необходимую скорость. При таком допущении график приведенного момента имеет характерный вид, показанный на рис. 6.4.

При пуске действуют только движущие силы и силы тяжести. Движущие силы преобладают, и момент  $M_{\text{п}}$  положительный, направленный по скорости. После вступления в работу сил полезного сопротивления, действующих противоположно скорости звена приложения, а значит и звена приведения, момент  $M_{\text{п}}$  начинает колебаться около нулевого значения. Причём, он положительный, когда преобладают движущие силы, и отрицательный, когда преобладают силы полезного сопротивления. По завершению технологического процесса, например строгания, двигатель отключается ( $M_{\text{д}} = 0$ ) и под действием сил полезного сопротивления машина останавливается.

Проинтегрировав приведённый момент, получают его работу  $A(\varphi)$ . Работа приведенного момента – это работа всех внешних сил. При отсутствии трения работа внешних сил расходуется только на изменение кинетической энергии машины. Поэтому график работы  $A(\varphi)$  рассматривают одновременно и как график кинетической энергии машины  $T(\varphi)$ .

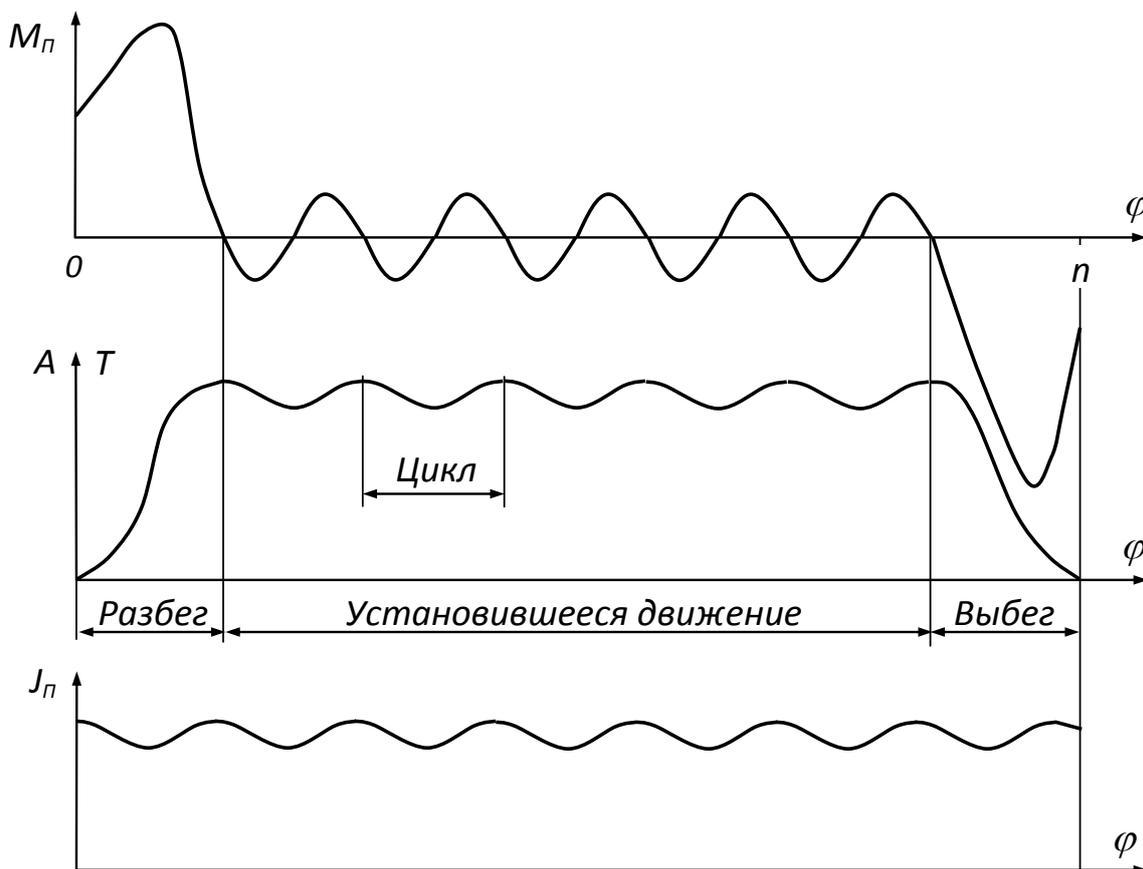


Рис. 6.4

На графике кинетической энергии выделяют три характерных участка. Они соответствуют разбегу, установившемуся движению и выбегу машины.

При установившемся движении кинетическая энергия изменяется периодически. Период изменения называется энергетическим *циклом* машины. В большинстве кривошипных машин-орудий этот цикл соответствует одному обороту кривошипа, в одноцилиндровых четырехтактных двигателях внутреннего сгорания – двум оборотам.

*Чтобы движение было установившимся, работа всех внешних сил за цикл должна быть равна нулю. Работа сил тяжести за цикл*

равна нулю всегда. С учётом этого, можно утверждать, что движение будет установившимся, если за каждый цикл работа движущих сил будет равна работе сил полезного сопротивления. То есть, сколько энергии сообщили механизму движущие силы, столько энергии должны отнять силы полезного сопротивления.

После кинетической энергии строят график приведенного момента инерции  $J_{\Pi}(\varphi)$ . Кинетическая энергия машины  $T = J_{\Pi} \frac{\omega^2}{2}$ . Отсюда скорость

$$\omega = \frac{\sqrt{2T}}{J_{\Pi}}. \quad (6.1)$$

На этом задачу можно считать решённой, т. к. есть всё необходимое для вычисления  $\omega$  для любого наперёд заданного  $\varphi$ .

### 6.2.2 Скорость по диаграмме Ф. Виттенбауэра

Решение рассмотренной задачи обретает новые свойства, если воспользоваться диаграммой, предложенной в начале прошлого

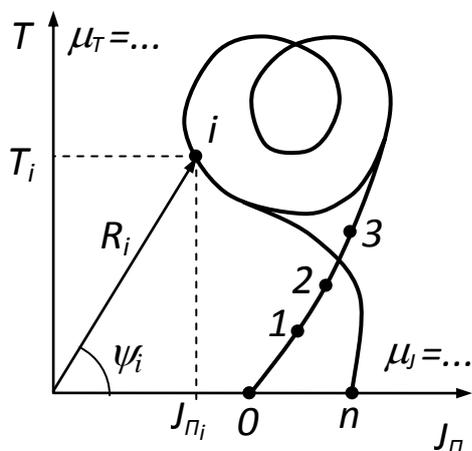


Рис. 6.5

столетия немецким учёным Фердинандом Виттенбауэром. Диаграмма Виттенбауэра представляет собой зависимость кинетической энергии  $T$  от приведённого момента инерции  $J_{\Pi}$ . Диаграмма строится по графикам  $T(\varphi)$  и  $J_{\Pi}(\varphi)$ . Для этого при каждом  $\varphi$  измеряют  $T$ ,  $J_{\Pi}$  и откладывают измеренное по одноимённым осям диаграммы (рис. 6.5).

Каждую точку диаграммы нумеруют соответственно разбивке оси  $\varphi$  исходных графиков. Точки  $0$  и  $n$  соответствуют началу и концу всего периода работы машины. Режиму установившегося движения соответствует замкнутый участок диаграммы. Текущая точка диаграммы пробегает по этому участку столько раз, сколько циклов содержит установившееся движение. Глядя на диаграмму, не следует думать, что кинетическая энергия зависит от приведённого момента инерции физически. Диаграмма всего лишь объединяет два графика в один.

Пусть  $\mu_T, \mu_J$  есть масштабные коэффициенты по осям диаграммы Виттенбауэра,  $\psi_i$  – угол радиус-вектора  $R_i$  текущей точки диаграммы. Тогда согласно формуле (5.1), в точке  $i$  скорость звена приведения

$$\omega_i = \overline{2 \frac{\mu_T T_i}{\mu_J J_i}} = \overline{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_i}. \quad (6.2)$$

Как показывает формула, скорость изменяется соответственно углу  $\psi_i$ . Например, если  $\psi = 0$ , то и  $\omega = 0$ ; если  $\psi$  растёт, то и  $\omega$  растёт. Следя за углом, можно предсказать поведение скорости, не производя вычислений. В этом состоит достоинство диаграммы Виттенбауэра.

### 6.2.3 Дифференциальное уравнение движения машины

Пусть механизм машины имеет одну степень свободы и звено приведения совершает вращательное движение. Тогда динамическая модель машины будет иметь вид, показанный на рис. 6.6.

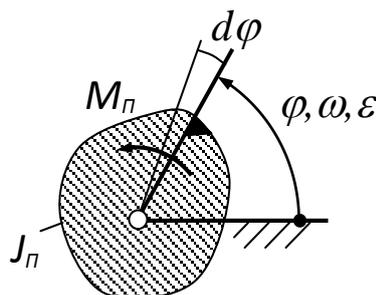


Рис. 6.6

Согласно известной теореме, приращение кинетической энергии машины равно приращению работы внешних сил:  $dT = dA$ .

Приращение работы  $dA = M_n d\varphi$ . С учётом этого,  $dT = M_n d\varphi$ . Отсюда:  $M_n = \frac{dT}{d\varphi}$ .

Отношение  $dT$  к  $d\varphi$  можно рассматривать как производную от кинетической энергии по углу поворота звена приведения. Кинетическая энергия  $T = J_n \frac{\omega^2}{2}$ . Дифференцируя правую часть по  $\varphi$ , получают:  $M_n = J_n \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{dJ_n}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2}$ . Произведение  $\omega \frac{d\omega}{d\varphi}$  приводимо к более простому и понятному виду. Для этого его умножают и делят на приращение времени  $dt$ . После преобразований получают угловое ускорение  $\varepsilon$  звена приведения:

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{dt}{dt} = \omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \omega \varepsilon \frac{1}{\omega} = \varepsilon.$$

После подстановки в исходное выражение получают:

$$\boxed{M_n = J_n \varepsilon + \frac{dJ_n}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2}}. \quad (6.3)$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения машины. Оно проще, чем уравнения Лагранжа второго рода, но применимо к механизмам только с одной степенью свободы. Интегрированием дифференциального уравнения находят закон движения машины.

### 6.3 Подбор маховика

Как уже отмечалось, при установившемся движении диаграмма Виттенбауэра имеет вид замкнутой кривой (рис. 6.7).

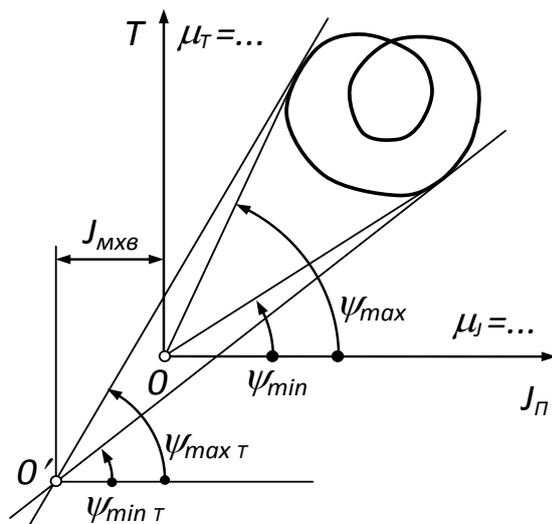


Рис. 6.7

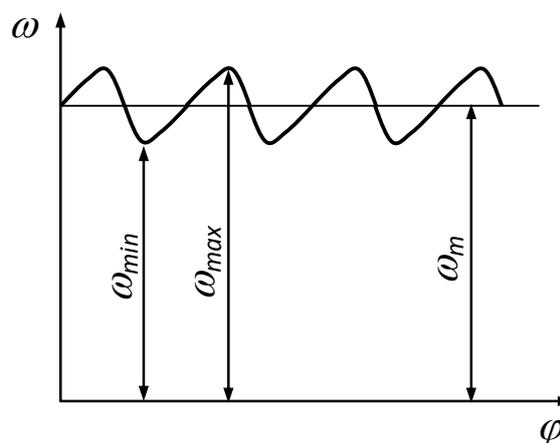


Рис. 6.8

Переходя от одной точки диаграммы к другой и следя за углом радиус-вектора, находят, что звено приведения вращается неравномерно, его скорость периодически меняется, колеблясь около некоторого среднего значения  $\omega_m$  (рис. 6.8).

Индекс  $t$  происходит от английского *mean* и означает – среднее. Экстремальным скоростям  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$  соответствуют экстремальные углы  $\psi_{\max}$ ,  $\psi_{\min}$  радиус-вектора. При экстремальных углах радиус-вектор становится касательным к диаграмме Виттенбауэра. Проводя касательные и измеряя углы их наклона, находят экстремальные скорости  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ . Как следует из формулы (5.2),

$$\omega_{\min}^{\max} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\min}^{\max}}. \quad (6.4)$$

Верхние индексы – для  $\max$ , нижние – для  $\min$ . Степень неравномерности вращения звена приведения оценивают коэффициентом неравномерности

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}, \quad (6.5)$$

где среднюю скорость  $\omega_m$  вычисляют упрощённо, а именно как среднее арифметическое:

$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (6.6)$$

Пусть у исследуемой машины неравномерность вращения звена привода оказалась больше, чем требуется, т. е.  $\delta > \delta_T$ , где  $\delta_T$  – требуемый коэффициент неравномерности. Тогда из формул (6.5), (6.6) выводят требуемые экстремумы скорости

$$\omega_{\min T}^{\max T} = \omega_m \left( 1 \pm \frac{\delta_T}{2} \right).$$

Затем из (6.4) выводят и вычисляют требуемые углы касательных

$$\operatorname{tg} \psi_{\min T}^{\max T} = \frac{1}{2} \omega_{\min T}^{\max T} \frac{2 \mu_T}{\mu_J}.$$

Проводя касательные под требуемыми углами, находят, что начало координат должно переместиться из точки  $O$  (ноль) в точку  $O'$ . При этом приведённый момент инерции и кинетическая энергия машины должны возрасти на некоторую величину. Увеличение момента инерции обеспечивают путём установки на вал звена привода массивного диска, называемого маховиком. Момент инерции маховика

$$J_{\text{МХВ}} = \mu_J J_{\text{МХВ}}.$$

На рис. 6.9 показан кривошипный механизм с маховиком 1, установленным на валу кривошипа. Кривая 2 показывает скорость кривошипа до установки маховика, кривая 3 – после. Как видим, после установки размах колебаний скорости становится меньше.

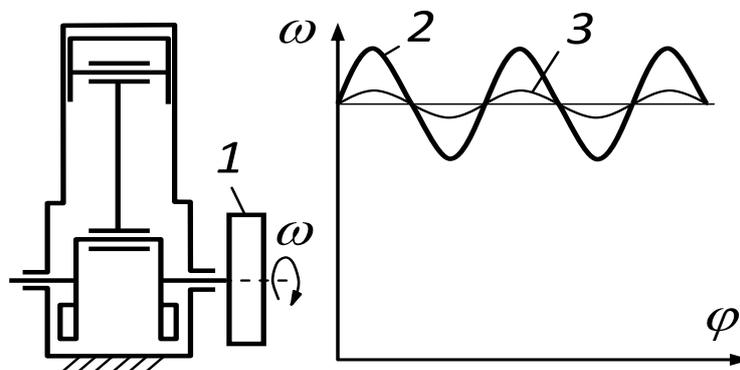


Рис. 6.9

## 6.4 Уравновешивание вращающихся звеньев

Пусть исследуемое звено вращается вокруг неподвижной оси с постоянной скоростью  $\omega$  (рис. 6.10, а). В теории уравновешивания вращающиеся звенья изображают в виде цилиндра, независимо от их действительной формы, и называют роторами.

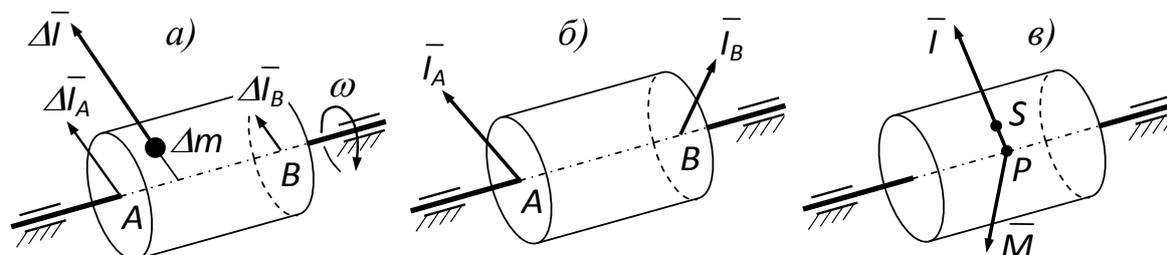


Рис. 6.10

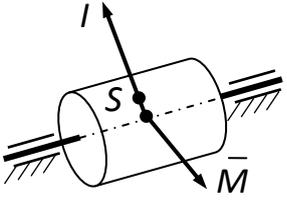
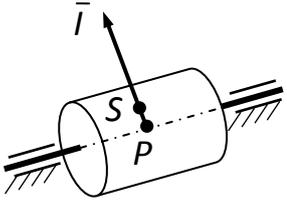
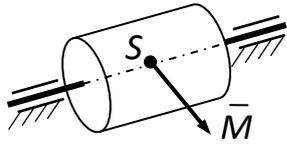
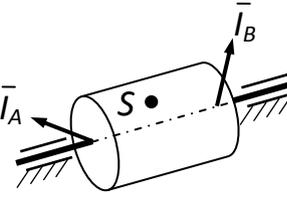
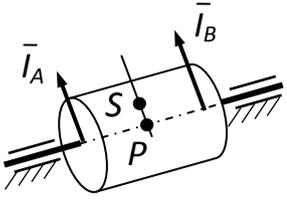
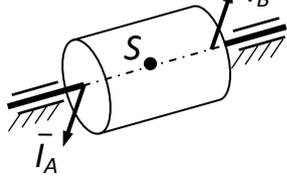
Каждая элементарная масса  $\Delta m$  ротора действует на него (на воображаемый невесомый и безынерционный каркас ротора) с силой инерции  $\Delta I$ . Чтобы оценить совокупное действие сил инерции всех элементарных масс, каждую такую силу раскладывают на составляющие  $\Delta I_A$ ,  $\Delta I_B$ , приложенные к точкам  $A$  и  $B$ , расположенным в торцевых плоскостях ротора. В результате разложения получают два пучка векторов, перпендикулярных оси ротора. Равнодействующие  $I_A$ ,  $I_B$  этих пучков образуют так называемый *крест сил* (рис. 6.10, б).

В общем случае составляющие креста сил не равны друг другу и не параллельны. Крест сил занимает неизменное положение относительно ротора и вращается вместе с ним. Стремясь последовать за составляющими креста сил, ротор сотрясает корпус машины, порождая шум и вибрации.

Существует ещё одна форма представления сил инерции ротора – в виде главного вектора  $I$  и главного момента  $M$  (рис. 6.10, в). К этой форме можно прийти путём параллельного переноса элементарных сил инерции  $\Delta I$  в какую-нибудь точку, например проекцию  $P$  центра масс  $S$  ротора на ось вращения, либо путём параллельного переноса составляющих  $I_A$ ,  $I_B$  креста сил.

В теории уравновешивания выделяют три случая неуравновешенности: общая, статическая, динамическая. Характеристика этих случаев приведена ниже в таблице. В первой и второй стро-

ках дана характеристика неуравновешенности через главный вектор и главный момент. В третьей строке показана форма креста сил. При статической неуравновешенности составляющие креста направлены в одну и ту же сторону, параллельную прямой  $PS$ . При динамической неуравновешенности эти составляющие образуют пару сил.

№	Общая	Статическая	Динамическая
1	$I \neq 0$ $M \neq 0$	$I \neq 0$ $M = 0$	$I = 0$ $M \neq 0$
2			
3			

Статическая неуравновешенность называется так потому, что обнаруживает себя не только в движении, но и в покое, в статике. Покоящийся ротор стремится повернуться так, чтобы центр его масс занимал наинизшее положение. При динамической неуравновешенности центр масс лежит на оси вращения, поэтому неуравновешенность проявляется только в движении, в динамике.

Уравновешенный ротор имеет  $I = 0$ ,  $M = 0$ . Это возможно, например, если ротор представляет собой цилиндр равномерной плотности. Сместив такой цилиндр относительно оси вращения в радиальном направлении, получают статическую неуравновешенность. Не смещая, но перекашивая цилиндр, получают динамическую неуравновешенность. Все эти неточности положения возникают, например, при посадке на вал тел вращения (зубчатых колёс, шкивов, крыльчаток вентиляторов и т. д.) с помощью так называемой клиновой шпонки.

Выраженную динамическую неуравновешенность имеет коленчатый вал (рис. 6.11, а). Силы инерции П-образных колен этого вала представляют собой пару  $I_A, I_B$ .

Эту пару нейтрализуют силами инерции противовесов  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , которые закладывают ещё на стадии проектирования (рис. 6.11, б).

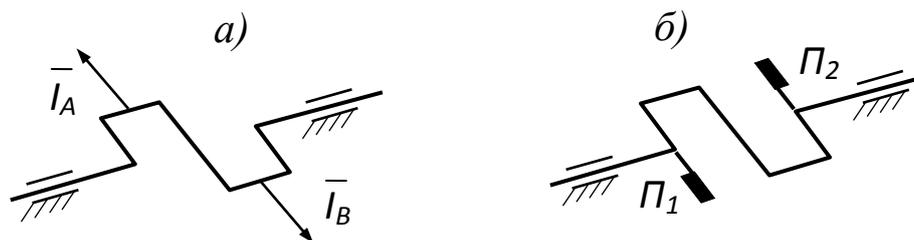


Рис. 6.11

Из-за неточности формы и неравномерной плотности теоретически уравновешенный ротор оказывается немного неуравновешенным. Техническая операция по устранению реальной неуравновешенности называется *балансировкой*.

Реальная неуравновешенность, как и теоретическая, устраняется так называемыми *корректирующими массами*. Они подбираются и устанавливаются на роторе так, чтобы силы их инерции были равны и противоположны составляющим креста сил. При этом предполагается, что корректирующие массы располагаются в тех же торцевых плоскостях, что и составляющие креста сил. В противном случае вносится поправка.

Статическую неуравновешенность можно устранить всего одной корректирующей массой. Для устранения общей и динамической неуравновешенности требуются как минимум две корректирующие массы. При уравнивании маховиков, шкивов ремённых передач, коленчатых валов и других массивных изделий, корректирующие массы не добавляют, а удаляют на диаметрально противоположной стороне. Это делают путём высверливания.

## 6.5 Уравнивание механизмов

Уравнивание механизмов состоит в нейтрализации сил инерции, т. е. в таком распределении добавляемых масс, при котором главный вектор  $I$  и главный момент  $M$  сил инерции элементарных масс всех подвижных звеньев равны нулю. Как и при уравнивании роторов, сведение к нулю главного вектора называется статическим уравниванием, а сведение к нулю главного момента – динамическим. Уравнивание рассматри-

вадается далее на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 6.12, *а*).

Из теоретической механики известно, что главный вектор сил инерции системы (в данном случае – механизма) определяется по формуле  $I = -ma_S$ , где  $m$  – масса всех подвижных звеньев механизма,  $a_S$  – ускорение общего центра масс звеньев. Этот центр находят так же, как для твёрдого тела, в которое объединяют все подвижные звенья.

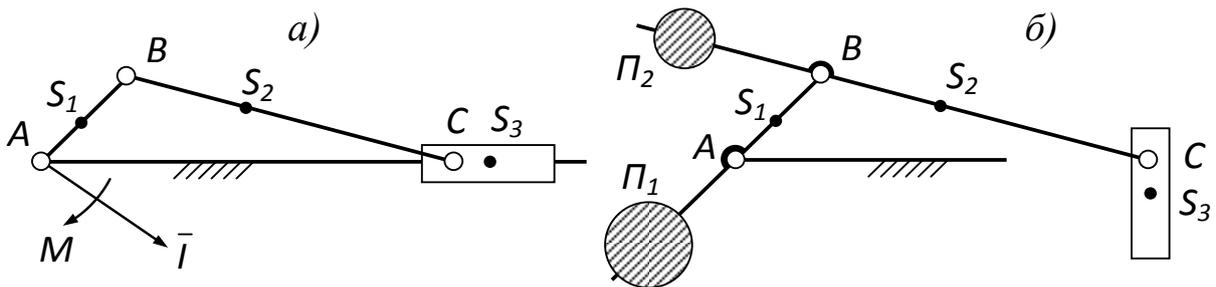


Рис. 6.12

Главный вектор можно сделать равным нулю только за счёт обращения в нуль ускорения  $a_S$ . Нулевое ускорение может быть в двух случаях: при равномерном прямолинейном движении или при отсутствии движения. Равномерное прямолинейное движение не может быть сколь угодно долгим, поэтому остаётся последнее – неподвижность. Неподвижность достигается введением дополнительных масс – противовесов, сводящих общий центр масс в точку  $A$  – центр вращения кривошипа.

Для этого отсоединяют ползун от стойки (рис. 6.12, *б*). Закрепив кривошип, удлиняют шатун и размещают на нём противовес  $\Pi_2$ . Смещая противовес по удлинителю, добиваются равновесия всех масс, подвешенных за точку  $B$ . Равновесие будет означать, что центр масс противовеса, шатуна с удлинителем и ползуна находится в точке  $B$ .

Продолжая уравновешивание, удлиняют кривошип и на удлинителе помещают противовес  $\Pi_1$ . Освободив кривошип и смещая противовес по удлинителю, добиваются равновесия всей системы относительно точки  $A$ . Равновесие будет означать, что центр всех подвижных масс сместился в точку  $A$ .

Если теперь поставить отсоединённый ползун на место и предоставить механизм самому себе, то при любом положении звеньев он будет находиться в состоянии безразличного равновесия. Без уравнивания механизм стремился бы к положению, при котором центр подвижных масс был бы в наинизшей точке. Так проявляется статическая уравновешенность в покое. При движении центр подвижных масс будет находиться в точке  $A$ , что и требуется для обращения в нуль главного вектора сил инерции.

Динамическое уравнивание значительно труднее, причём, как теоретически, так и практически. Существует два метода динамического уравнивания. Первый состоит в том, что механизм делают симметричным. При полной симметрии решается задача не только динамического, но и статического уравнивания. Пример показан на рис. 6.13, *а*.

Второй метод требует введения устройств, создающих генерирующие встречные моменты. Простейший генератор моментов показан на рис. 6.13, *б*.

Генератор состоит из трёх зубчатых колёс. Среднее связано с кривошипом. Крайние колёса снабжены противовесами или, иначе, дисбалансами  $D_1, D_2$ . Дисбалансы создают пару постоянных по величине сил инерции  $I' - I''$ . Плечо пары периодически меняется. Вместе с ним меняется и момент пары. Закон изменения момента – гармонический. В уравниваемом механизме силы инерции в форме момента создаёт только шатун (см. момент  $M$ ). Закон изменения момента шатуна близок к гармоническому. При надлежащем подборе массы дисбалансов момент шатуна почти полностью уравнивается моментом генератора.

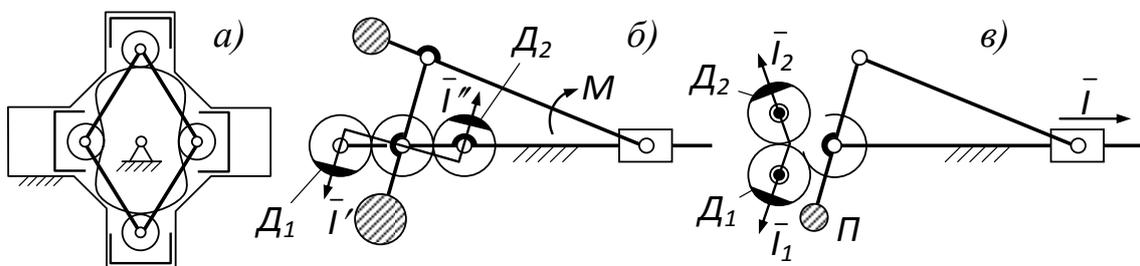


Рис. 6.13

Вращающиеся дисбалансы используются и для статического уравнивания (рис. 6.13, *в*). Это делается, когда противовесы

нежелательны. Оснований к этому более, чем достаточно: это увеличение габаритов и массы, увеличение динамических нагрузок на подвижные звенья и их шарниры. Уменьшаются динамические нагрузки лишь на стойку. Отказ от противовеса на шатуне уменьшает и кривошипный противовес.

Массу кривошипного противовеса  $\Pi$  подбирают при этом следующим образом. Массу шатуна заменяют двумя частными массами, сосредоточенными на его концах. Величины частных масс определяют из условия, чтобы их сумма была равна массе всего шатуна, а отношение было обратно пропорционально расстояниям до его центра масс. Такая замена называется статическим замещением масс.

Противовесом кривошипа уравновешивают сам кривошип и ту часть массы шатуна, которая сосредоточена на его левом конце. Остаются неуравновешенными масса ползуна и та часть массы шатуна, которая сосредоточена на его правом конце. Обе эти массы совершают горизонтальное движение. Силу инерции  $\bar{I}$  этих масс уравновешивают с помощью вращающихся дисбалансов  $D_1, D_2$ .

Как и в предыдущем случае, дисбалансы получают движение от кривошипа, но колесо кривошипа входит в зацепление только с нижним дисбалансным колесом. Верхнее получает движение от нижнего. Равнодействующая сил инерции  $I_1, I_2$  дисбалансов всегда направлена по горизонтали и изменяется по гармоническому закону. Близко к такому закону, но в противофазе, изменяется уравновешиваемая сила инерции. В результате сложения остаётся незначительная результирующая.

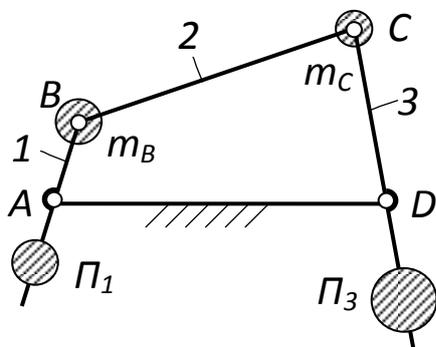


Рис. 6.14

На рис. 6.14 показано статическое уравновешивание шарнирного четырёхзвенника. Полагая, что масса шатуна 2 статически замещена массами  $m_B, m_C$ , добавляют противовесы  $\Pi_1, \Pi_3$ . Первый смещает центр масс кривошипа 1 и массы  $m_B$  в точку  $A$ , второй смещает центр масс коромысла 3 и массы  $m_C$  в точку  $D$ . Общий центр масс оказывается на линии  $AD$  и занимает на ней неизменное положение.

мает на ней неизменное положение.

## Заключение

Теория механизмов и машин в основном завершила своё развитие. Новые возможности для развития всех наук и теории механизмов, в частности, предоставляет вычислительная техника. Она позволяет автоматизировать известные расчёты и ставить новые, невозможные в докомпьютерную эпоху.

Знания, приобретённые в результате изучения курса ТММ, потребуются, прежде всего, при изучении основ конструирования в курсе «Детали машин», где вам придётся выполнять прочностные расчёты зубчатых передач. Эти расчёты опираются на геометрию зубчатых зацеплений. Знание геометрии зацеплений потребуется также при изучении технологами зуборезных станков и зуборезных инструментов. Эксплуатационникам – автомобилистам потребуется практически всё, что изучалось в курсе ТММ, т. к. автомобиль – это средоточие основных видов всех механизмов: рычажных, кулачковых и зубчатых.

Технологам и эксплуатационникам, на которых рассчитан данный краткий курс, не придётся создавать новую технику, однако для грамотной эксплуатации машин нужны знания не меньшие, чем те, что требуются разработчику. Следует иметь в виду также, что на производстве, как правило, нет времени на исследования и расчёты, поэтому специалист должен принимать решения, руководствуясь физической сущностью процессов, происходящих в машине. Для выявления этой сущности нужны упражнения, тренирующие ваше кинематическое и динамическое мышление. Вы должны научиться ставить себя на место того или иного звена механизма, чтобы быстро без вычислений понять, насколько велики или ничтожны нагрузки на это звено. И тогда на этой основе вы будете в состоянии прогнозировать вероятность поломок либо выяснять их причину и грамотно устранять эти поломки.

Несмотря на головокружительные успехи электроники и повсеместную информатизацию, человечеству ещё долго придётся добывать полезные ископаемые и превращать их в полезные продукты. А для этого нужны машины и люди, которые в них разбираются.

## Список рекомендуемой литературы

### Основная

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Альянс, 2008. – 640 с.
2. Левитская, О. Н. Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М. : Высш. шк., 1985. – 279 с.

### Справочная

3. Артоболевский, И. И. Механизмы в современной технике. Справочное пособие : в 7 т. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1979 . – 1981.
4. Кожевников, С. Н. Механизмы : справочник. – 4-е изд., перераб. и доп. / С. Н. Кожевников, Я. И. Есипенко, Я. М. Раскин ; под ред. С. Н. Кожевникова. – М. : Машиностроение, 1976. – 784 с.
5. Крайнев, А. Ф. Словарь-справочник по механизмам. – 2-е изд., перераб. и доп. / А. Ф. Крайнев – М. : Машиностроение, 1987. – 560 с.

### Дополнительная

6. Боголюбов, А. Н. История механики машин. – Киев : Наукова думка, 1964. – 463 с.
7. Демьянов, В. П. Геометрия и марсельеза. – М. : Знание, 1986. – 256 с.
8. Демьянов, В. П. Рыцарь точного знания / В. П. Демьянов. – М. : Знание, 1991. – 192 с.

## Оглавление

Предисловие	3
Введение	4
Основные понятия ТММ	5
Некоторые обозначения	7
<b>1 Кулачковые механизмы</b> .....	<b>8</b>
1.1 Анализ механизма со стержневым толкателем.....	10
1.1.1 Функция положения	10
1.1.2 Скорость и ускорение толкателя	12
1.1.3 Кинематический смысл производных от функции положения	13
1.1.4 Передаточное отношение – через МЦВ	14
1.2 Синтез механизма со стержневым толкателем.....	15
1.2.1 Угол давления	15
1.2.2 Диаграмма «перемещение – передаточное отношение»	17
1.2.3 Определение начального радиуса и эксцентриситета	18
1.2.4 Построение профиля кулачка	18
1.3 Механизм с коромысловым толкателем.....	19
1.3.1 Функция положения и её производные	19
1.3.2 Передаточное отношение – через МЦВ	20
1.3.3 Диаграмма «перемещение – передаточное отношение»	21
1.3.4 Определение начального радиуса и длины стойки	22
1.4 Механизм с тарельчатым толкателем.....	23
1.4.1 Анализ механизма	23
1.4.2 Синтез механизма	23
<b>2 Зубчатые механизмы</b> .....	<b>25</b>
2.1 Цилиндрические прямозубые зацепления.....	25
2.1.1 Определение передаточного отношения через числа зубьев	25
2.1.2 Определение передаточного отношения через профили зубьев	26
2.1.3 Центроиды зацепления	27
2.1.4 Идея циклоидального зацепления	28
2.2 Эвольвентное зацепление.....	29
2.2.1 Принцип образования зацепления	29
2.2.2 Эвольвента, её свойства и уравнения	30
2.2.3 Колёсное зацепление	32
2.2.4 Реечное зацепление	34
2.3 Профилирование зубьев.....	36
2.3.1 Способ Оливье	36
2.3.2 Коррекция эвольвентного зацепления	37
2.3.3 Параметры стандартного производящего контура	41
2.4 Параметры колеса и зацепления.....	43
2.4.1 Станочное зацепление	43
2.4.2 Рабочее зацепление	46
2.4.3 Блокирующие контуры	50
2.4.4 Станочное колёсное зацепление	51
2.4.5 Элементы внутреннего зацепления	52

2.5 Цилиндрическое косозубое зацепление.....	52
2.5.1 Принцип образования зацепления	52
2.5.2 Изготовление зацепления	54
2.6 Конические зацепления.....	57
2.6.1 Образование прямозубого зацепления	57
2.6.2 Изготовление зацепления	58
2.6.3 Образование зацепления с косыми и круговыми зубьями	60
2.7 Зацепления со скрещивающимися осями.....	61
2.7.1 Начальные поверхности	61
2.7.2 Винтовое зацепление	62
2.7.3 Червячное зацепление	64
2.8 Зубчатые передачи.....	67
2.8.1 Передачи с неподвижными осями колёс	67
2.8.2 Анализ планетарных передач	68
2.8.3 Синтез простейшей планетарной передачи	72
2.8.4 Волновая передача	74
2.8.5 Зубчатые дифференциалы	75
3 Избыточные связи в механизмах.....	79
3.1 Связи кинематических пар	79
3.2 Связи пар, избыточные для механизма	82
3.3 Структурная формула механизма	84
3.4 Устранение избыточных связей в одноконтурных механизмах	84
3.4.1 Метод деформации звеньев	85
3.4.2 Алгебраический метод	86
3.5 Многоконтурные механизмы.....	90
3.5.1 Структурная формула присоединяемой цепи механизма	91
3.5.2 Устранение избыточных связей в многоконтурных механизмах	92
3.6 Структура двумерных моделей механизмов.....	93
3.6.1 Связи кинематических пар	93
3.6.2 Связи пар, избыточные для механизма	94
3.6.3 Структурные формулы	95
4 Рычажные механизмы.....	96
4.1 Графические методы кинематического анализа и синтеза...	96
4.1.1 Определение положений звеньев	96
4.1.2 Группы Ассур	98
4.1.3 Замена высших пар	100
4.1.4 Определение скоростей и ускорений	101
4.1.5 Некоторые задачи синтеза	111
4.2 Аналитические методы кинематического анализа и синтеза	116
4.2.1 Метод векторных контуров	116
4.2.2 Метод преобразования координат	121
4.2.3 Методы синтеза	128
5 Силовой расчёт механизмов.....	132
5.1 Постановка задачи.....	132
5.2 Силы инерции.....	132
5.3 Методы силового расчёта.....	133

---

5.4 Пример погруппного силового расчёта.....	135
5.4.1 Расчёт группы 4, 5	136
5.4.2 Расчёт группы 2, 3	138
5.4.3 Расчёт начального механизма	139
5.4.4 Теорема Жуковского	140
5.4.5 Проверка силового расчёта	141
6 Динамика машин.....	142
6.1 Приведение сил и масс.....	142
6.1.1 Приведение сил и масс при постоянных передаточных отношениях	142
6.1.2 Приведение сил и масс при переменных передаточных отношениях	145
6.2 Определение скорости звена приведения.....	148
6.2.1 Скорость из уравнения кинетической энергии	148
6.2.2 Скорость по диаграмме Виттенбауэра	150
6.2.3 Дифференциальное уравнение движения машины	151
6.3 Подбор маховика.....	152
6.4 Уравновешивание вращающихся звеньев.....	154
6.5 Уравновешивание механизмов.....	156
Заключение.....	160
Список рекомендуемой литературы.....	161

Ермак Владимир Николаевич

**Теория механизмов и машин  
(краткий курс)**

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано 20.09.2011. Формат 60×84/16

Бумага белая писчая. Отпечатано на ризографе

Уч.-изд. л. 10,00.. Тираж 250 экз.

Заказ 29

ФГБОУ ВПО «Кузбасский государственный  
технический университет им. Т. Ф. Горбачёва»

650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Типография ФГБОУ ВПО «Кузбасский  
государственный технический университет  
им. Т. Ф. Горбачёва»

650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а