МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
И. А. Ермакова
В. А. Гоголин

МАТЕМАТИКА

Методические указания к контрольной работе № 1 для студентов заочной формы обучения

Рекомендованы учебно-методической комиссией направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» в качестве электронного издания для самостоятельной работы

Кемерово 2016

Рецензент

В. М. Волков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики

Ермакова Инна Алексеевна
Гоголин Вячеслав Анатольевич
Математика [Электронный ресурс]: методические указания к контрольной работе № 1 для студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» заочной формы обучения / сост.: И. А. Ермакова, В. А. Гоголин; КузГТУ. – Кемерово, 2016.

Приводятся задания и методические указания по их решению, а также список вопросов для подготовки к экзамену.

Задания в контрольной работе охватывают все темы, изучаемые в 1 семестре по дисциплине «Математика». Выполнение заданий позволит студенту качественно подготовиться к экзамену.

Дисциплина «Математика» изучается в течение трех семестров на 1-ом и 2-м курсе. В первом семестре 1-го курса студенты заочной формы обучения выполняют контрольную работу №1.

Студент выполняет контрольную работу, выбирая вариант задания по последней цифре зачетной книжки. Если последняя цифра равна 0, то студент решает вариант №10. Работа, выполненная не по своему варианту, не проверяется.

Работу следует выполнять в рукописном виде. Задания писать обязательно.

Решения задач должны быть выполнены и оформлены аналогично тому, как показано в методических указаниях. При отсутствии письменных объяснений, студент должен быть готов дать устные пояснения к решению задач.

ПРОГРАММА 1 СЕМЕСТРА

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА 1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства 1.2. Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса 1.4. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица 1.5. Матричный метод решения СЛАУ
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА 2.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Длина (норма) вектора и отрезка, направляющие косинусы, нормированный вектор 2.2. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности векторов. 2.3. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл. Условие коллинеарности двух векторов. 2.4. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов
3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ 3.1. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой. 3.2. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду. 3.3. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами 3.4. Плоскость и прямая в пространстве. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Точка пересечения трех плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности. 3.5. Поверхности второго порядка в пространстве. Цилиндрические поверхности.

Эллипсоид. Сфера. Однополостной гиперболоид. Двуполостной гиперболоид. Эллиптический параболоид. Конус. Гиперболический параболоид.
4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 4.1. Общие представления о функции одной переменной. Понятие функции одной переменной и способы ее задания. Область определения. Сложная и обратная функции. Характеристики поведения функции. Основные элементарные функции и их графики. 4.2. Теория пределов. Предел функции на бесконечности. Предел функции в конечной точке. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых функций и их связь с бесконечно большими. Основные свойства пределов. Нахождение пределов. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции. 4.3. Непрерывность функции. Определение функции, непрерывной в точке. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 5.1. Производная. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Таблица производных. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Уравнение касательной и нормали к графику. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений. 5.2. Производные высших порядков. 5.3. Правило Лопиталя. 5.4. Полное исследование функции. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика.
6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 6.1. Понятие функции двух переменных, область определения. 6.2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

ЗАДАЧА 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x - y - 4z = 2 \\ 4x - y - z = 1 \end{cases}$$

Выразим из любого уравнения любую неизвестную (ту, которую легче выразить) и подставим ее в два других уравнения.

Из первого уравнения: $x = 4 + y - 2z$, подставим его в 1-е и 2-е уравнения. Получим:

$$\begin{cases} 3(4 + y - 2z) - y - 4z = 2 \\ 4(4 + y - 2z) - y - z = 1 \end{cases}.$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} 12 + 3y - 6z - y - 4z = 2 \\ 16 + 4y - 8z - y - z = 1 \end{cases}.$$

Приведем подобные:

$$\begin{cases} 2y - 10z = -10 \\ 3y - 9z = -15 \end{cases}.$$

Выразим из одного уравнения любую переменную (ту, которую легче выразить) и подставим ее в другое уравнение.

Из 1-го уравнения: $2y = -10 + 10z$, откуда $y = -5 + 5z$. Подставим во 2-е уравнение и получим:

$3(-5 + 5z) - 9z = -15 \;\Rightarrow\; -15 + 15z - 9z = -15 \;\Rightarrow\; 6z = 0 \;\Rightarrow$
$z = 0$.

Далее найдем $y = -5 + 5z = -5 + 5 \cdot 0 = -5$.

Теперь найдем $x = 4 + y - 2z = 4 + (-5) - 2 \cdot 0 = -1$.

Получили: $x = -1,\ y = -5,\ z = 0$.

Сделаем проверку, подставим найденные значения в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 - (-5) + 2 \cdot 0 = 4 \\ 3 \cdot (-1) - (-5) - 4 \cdot 0 = 2 \\ 4 \cdot (-1) - (-5) - 0 = 1 \end{cases}$$

Так как все равенства верные, то система решена верно.

ЗАДАЧА 2. Выполнить операции с матрицами.

Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 8 & -4 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

Найти: $2A$, $3C–2A$, $A\cdot B$.

Произведением матрицы A порядка $m\times n$ на число μ называется матрица $\mu A = A\mu$ того же порядка, элементами которой являются произведения соответствующих элементов матрицы A на число μ.

$$2A=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 2\cdot 2\\ -1\cdot 2 & 0\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Суммой (разностью) двух матриц A и B одинакового порядка называется матрица того же порядка, элементы которой являются суммой (разностью) соответствующих элементов матриц A и B. Тогда:

$$3C-4A=\begin{pmatrix}-2\cdot 3 & 4\cdot 3\\ 5\cdot 3 & 1\cdot 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\cdot 4 & 2\cdot 4\\ -1\cdot 4 & 0\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ 15 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 8\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & 4\\ 19 & 3\end{pmatrix}$$

Произведением матрицы A порядка $m\times n$ на матрицу B порядка $n\times p$ называется матрица порядка $m\times p$, элементы которой представляют собой сумму попарных произведений элементов i-й строки матрицы A на элементы j-го столбца матрицы B.

Пусть $A\cdot B = D$.

Определим размеры матриц и найдем произведение:

$$A_{2x2}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ B_{2x3}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 8 & -4 & 7\end{pmatrix},\ D=A_{2x2}\cdot B_{2x3}=D_{2x3}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 4+2\cdot 8 & 3\cdot 6+2\cdot(-4) & 3\cdot 5+2\cdot 7\\ -1\cdot 4+0\cdot 8 & -1\cdot 6+0\cdot(-4) & -1\cdot 4+0\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & 10 & 29\\ -4 & -6 & -5\end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 3. Вершины треугольника находятся в точках: $A(0;1)$, $B(2;3)$, $C(2;0)$. Построить треугольник. Найти: 1) длину стороны $|AB|$; 2) угол А, уравнения прямых: 3) (АВ) 4) высоты

(CH), 5) медианы (AM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от C до (AB); 8) площадь

Построим треугольник (рис. 1).

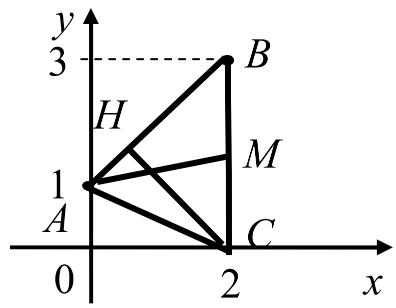


Рис. 1

1) Длина стороны $|AB|$ равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$. Найдем координаты этого вектора:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2-0; 3-1) = (2; 2).$

Длина вектора находится по формуле:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}83.$$

2) Угол A образован двумя векторами: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдем косинус угла между ними по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Имеем: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2-0; 0-1) = (2; -1)$.

$$\cos A = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{40}} \approx 0{,}316, \text{ тогда}$$

$A = \arccos 0{,}316 \approx 72^0.$

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки находится по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тогда (AB): $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-1}{3-1} \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow y = x + 1;$

4) Высота (CH) перпендикулярна стороне (AB), уравнение которой найдено: $y = x + 1$. Выпишем угловой коэффициент перед x: $k_1 = 1$. По условию перпендикулярности найдем $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{1} = -1$.

Так как высота (CH) проходит через известную вершину $C(2;0)$, то найдем ее уравнение по формуле:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x-2) \Rightarrow y = -x + 2$$

5) Медиана (AM) проходит через две точки: $A(0;1)$ и M – середину стороны BC. Найдем координаты точки

$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$, где $B(2;3)$ и $C(2;0)$. то есть $M\left(\frac{2+2}{2}; \frac{3+0}{2}\right) \Rightarrow M(2;1{,}5)$.

Таким образом, медиана проходит через две точки с известными координатами: $A(0;1)$ и $M(2;1{,}5)$. Уравнение прямой:

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Подставляем координаты:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{1{,}5-1} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0{,}5} \Rightarrow 0{,}5x = 2(y-1) \Rightarrow 0{,}5x = 2y - 2.$$

Отсюда $y = \frac{0{,}5x+2}{2} \Rightarrow y = 0{,}25x + 1$ – уравнение медианы (*AM*).

6) Пересечение высоты (*CH*) и медианы (*AM*) найдем, решая систему из двух уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 0{,}25x + 1 \end{cases} \Rightarrow -x + 2 = 0{,}25x + 1 \Rightarrow -1{,}25x = -1 \Rightarrow x = 0{,}8,$$

$$y = -x + 2 = -0{,}8 + 2 = 1{,}2.$$

Таким образом, точка пересечения имеет координаты: $(0{,}8;1{,}2)$. Сверяем положение точки на чертеже с рассчитанными координатами. Координаты являются верными. В том случае, если координаты точки на чертеже и в расчетах не совпадают, следует найти ошибку в расчетах.

7) Расстояние от вершины *C* до прямой (*AB*) найдем по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Запишем общее уравнение прямой (*AB*), для чего перенесем все слагаемые влево: $y = x + 1 \Rightarrow -x + y - 1 = 0$.

Из полученного уравнения выпишем коэффициенты: $A = -1$, $B = 1$, $C = -1$. Подставим в формулу координаты точки $C(2;0)$, тогда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}1.$$

8) Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}=\left(2;2;0\right)$ и $\overline{AC}=\left(2;-1;0\right)$ как на сторонах, значит $S_{\Delta}=\frac{1}{2}S_{\Diamond}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0\vec{i}-0\vec{j}-8\vec{k}.$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{0^2+0^2+(-8)^2}=8.$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=4 \text{ кв.ед.}$$

ЗАДАЧА 4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить линию.

Пример 1.

$x^2-2y^2+2x+12y-33=0$

Предварительно следует изучит виды кривых 2-го порядка, их уравнения и расположение (табл.1).

Приведём уравнение к каноническому виду. Для членов, содержащих x, и членов, содержащих y, выполним преобразования с выделением полного квадрата:

$x^2+2x=x^2+2x+1-1=\left(x+1\right)^2-1;$

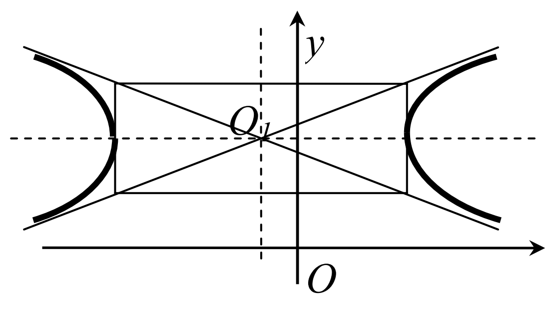
$-2y^2+12y=-2\left(y^2-6y+9-9\right)=-2\left(y-3\right)^2+18.$

Данное уравнение теперь можно переписать так:

$\left(x+1\right)^2-2\left(y-3\right)^2-1+18-33=0,$

откуда $\left(x+1\right)^2-2\left(y-3\right)^2=16$ или $\frac{\left(x+1\right)^2}{16}-\frac{\left(y-3\right)^2}{8}=1.$

Это уравнение гиперболы с центром в т. $O_1\left(-1;3\right)$ и полуосями $a=4,\ b=\sqrt{8}.$



Пример 2.

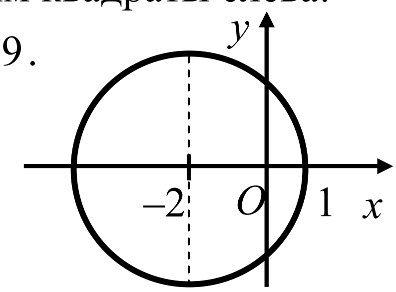
$x^2+4x+y^2-5=0$

Выпишем слагаемые с x и выделим полный квадрат:

$$x^2+4x=x^2+4x+4-4=(x+2)^2-4.$$

Подставим в исходное уравнение, оставим квадраты слева:

$$(x+2)^2-4+y^2-5=0 \Rightarrow (x+2)^2+y^2=9.$$



Это уравнение окружности с центром в т. $(-2;0)$ и радиусом $R=3$.

Пример 3.

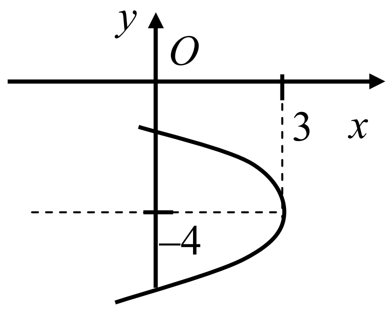
$$2x+y^2+8y+10=0$$

Выпишем слагаемые с y и выделим полный квадрат:

$$y^2+8y=y^2+8x+16-16=(y+4)^2-16.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$2x+(y+4)^2-16+10=0.$$



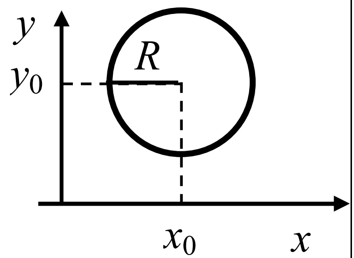
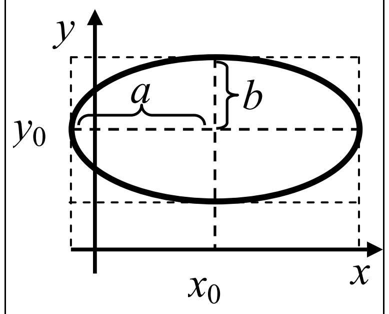
Оставим квадрат слева, остальные слагаемые перенесем вправо:

$(y+4)^2=-2x+6$, откуда

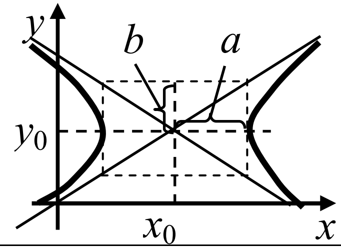
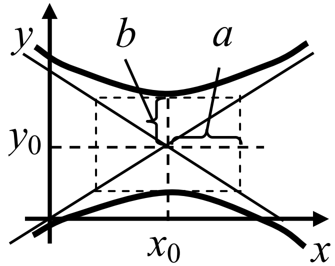
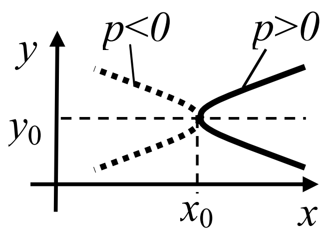
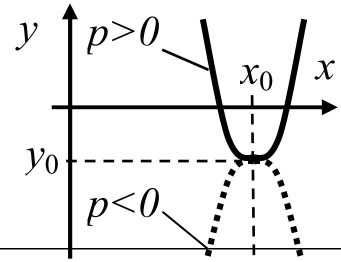
$(y+4)^2=-2(x-3)$. Это уравнение параболы, вершина в т. $(3;-4)$, ветви влево.

Таблица 1

Вид и параметры кривых второго порядка

Вид кривой	Канонические уравнения		Параметры кривой	Изображение кривой
	С центром (вершиной) в начале координат	С центром (вершиной) в точке $(x_0; y_0)$		
1	2	3	4	5
Окружность	$x^2 + y^2 = R^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	R – радиус, x_0 и y_0 – координаты центра	
Эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	x_0 и y_0 – координаты центра, a – большая полуось, b – малая полуось (если $a > b$) и наоборот (если $a < b$)	

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5
Гипербола с действительной осью Ox или ей параллельной	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	x_0 и y_0 – координаты центра, a – действительная полуось, b – мнимая полуось	
Гипербола с действительной осью Oy или ей параллельной	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$	x_0 и y_0 – координаты центра b – действительная полуось, a – мнимая полуось	
Парабола с осью симметрии Ox или ей параллельной	$y^2=2px$	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$	x_0 и y_0 – координаты вершины, p – параметр параболы	
Парабола с осью симметрии Oy или ей параллельной	$x^2=2py$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$	x_0 и y_0 – координаты вершины p – параметр параболы	

<u>ЗАДАЧА 5.</u> Найти пределы указанных функций.

Для всех элементарных функции в точке x_0 из области определения значение функции равно пределу функции. Поэтому, для нахождения предела функции следует подставить значение предельной точки в выражение функции. Если получено число, то оно и является пределом функции. Если получена неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty-\infty\right)$, то она раскрывается с помощью специальных приемов.

Рассмотрим примеры нахождение пределов.

Пример 1.

$$\lim_{x\to -2}\frac{6x^2+3x+1}{x^2-x-3}==\frac{6(-2)^2+3(-2)+1}{(-2)^2-(-2)-3}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x+2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{14}{0}\right)=\infty.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0}{4}=0.$$

Пример 4.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Это неопределённость. Чтобы раскрыть её, разложим числитель и знаменатель на множители.

В числителе воспользуемся формулой: $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$.

Знаменатель разложим по формуле:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения.

Найдем корни: $x^2-5x+4=0$, $D=5^2-4\cdot 1\cdot 4=9$, $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=1; 4$. Тогда $x^2-5x+6=(x-1)\cdot(x-4)$. Имеем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x-1}=\frac{4+4}{4-1}=\frac{8}{3}.$$

Пример 5.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{5x^3+6x-1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, заменим числитель и знаменатель эквивалентными на бесконечности функциями, для чего оставляем наибольшие степени в этих выражениях:

$(3x+5)$ ~ (эквивалентно) $3x$; $\left(5x^3+6x-1\right)\sim 5x^3$.

Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{5x^3+6x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5x^2}=\frac{3}{5\cdot\infty}=0.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+8x}{7x^2+9}=\left\langle\begin{array}{c}2x^4+8x\sim 2x^4\\ 7x^2+9\sim 7x^2\end{array}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{7x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{7}=\left(\frac{\infty}{7}\right)=\infty.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{6x^2+2x}=\left\langle\begin{array}{c}4x^2+3x-1\sim 4x^2\\ 6x^2+2x\sim 6x^2\end{array}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{6x^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

<u>ЗАДАЧА 6.</u> Найти производные указанных функций.

Следует использовать таблицу производных и правила дифференцирования.

1. $(c)'=0$
2. $(\sin x)'=\cos x$
3. $(\cos x)'=-\sin x$
4. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
5. $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
6. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
8. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
9. $\left(e^x\right)'=e^x$
10. $\left(a^x\right)=a^x\ln a$
11. $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$
12. $(x)'=1$

Рассмотрим примеры нахождения производных. Используем производную степенной функции (11):

Пример 1. $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

Пример 2. $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4}$.

Пример 3. $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{2/3}\right)' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$.

Пример 4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$.

Следует запомнить **правила дифференцирования**:

1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u'$$

Пример 5.

$\left(4x^2\right)' = 4 \cdot \left(x^2\right)' = 4 \cdot 2x = 8x$.

2. Производная суммы функций равна сумме производных:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Пример 6.

$\left(3^x + arctgx - 4\right)' = \left(3^x\right)' + (arctgx)' - (4)' = 3^x \, ln\, 3 + \dfrac{1}{1 + x^2}$.

3. Производная произведения находится по формуле:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Пример 7.

$$(ln\, x \cdot cos\, x)' = (ln\, x)' \cdot cos\, x + ln\, x \cdot (cos\, x)' = \frac{1}{x} \cdot cos\, x + ln\, x \cdot (-sin\, x)$$

4. Производная частного находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 8.

$$(tgx)' = \left(\frac{sin\,x}{cos\,x}\right)' = \frac{(sin\,x)' \cdot cos\,x - (cos\,x)' \cdot sin\,x}{cos^2\,x} =$$

$$\frac{cos^2\,x + sin^2\,x}{cos^2\,x} = \frac{1}{cos^2\,x}.$$

Пример 9.

$$\left(3x^2 + \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^7}} + 2x - 5\right)' =$$

(запишем вместо корней показатели степени и найдем производные каждого слагаемого)

$$= \left(3x^2 + x^{\frac{3}{5}} - 2x^{-\frac{7}{4}} + 2x - 5\right)' =$$

$$= 3 \cdot 2x + \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} - 2\left(-\frac{7}{4}\right) \cdot x^{-\frac{7}{4}-1} + 2 \cdot 1 = 6x + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \frac{14}{4}x^{-\frac{11}{4}} + 2 =$$

$$= 6x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + \frac{7}{2\sqrt[4]{x^{11}}} + 2.$$

Запишем таблицу основных формул дифференцирования для сложных функций.

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(sin\,u)' = cos\,u \cdot u'$
3. $(cosu)' = -sin\,u \cdot u'$
4. $(tgu)' = \dfrac{1}{cos^2\,x} \cdot u'$
5. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{sin^2\,u} \cdot u'$
6. $(arcsin\,u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
7. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
8. $(ln\,u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(a^u) = a^u\,ln\,a \cdot u'$

Пример 10.

$$\left[ctg\left(3-x^3\right)\right]' = \left(ctgu\right)' = -\frac{1}{sin^2 u}\cdot u' =$$

$$= -\frac{\left(3-x^3\right)'}{sin^2\left(3-x^3\right)} = \frac{3x^2}{sin^2\left(3-x^3\right)}.$$

Пример 11.

$$\left(ln^2 x\right)' = \left(u^2\right)' = 2u\cdot u' = 2\,ln\,x\cdot\frac{1}{x}$$

Пример 12.

$$\left(sin^3 x\cdot\sqrt{3x-4}\right)' = \left(sin^3 x\right)'\cdot\sqrt{3x-4} + sin^3 x\cdot\left(\sqrt{3x-4}\right)' =$$

$$= 3\,sin^2 x\cdot cos\,x\cdot\sqrt{3x-4} + sin^3 x\cdot\frac{1}{2}\left(3x-4\right)^{-1/2}\cdot 3$$

Пример 13.

$$\left(\frac{sin\left(5x-1\right)}{2^x}\right)' = \frac{\left(sin\left(5x-1\right)\right)'\cdot e^x - sin\left(5x-1\right)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{cos\left(5x-1\right)\cdot 5\cdot e^x - sin\left(5x-1\right)\cdot e^x}{e^{2x}}$$

Пример 14.

$$\left(arctg\sqrt{4x+5}\right)' = \left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+\left(4x+5\right)}\cdot\frac{1}{2}\left(4x+5\right)^{-1/2}\cdot 4$$

Пример 15.

$$\left(sin^6\left(4x\right)\right)' = \left(u^6\right)' = 6u^5\cdot u' = 6\,sin^5\left(4x\right)\cdot cos\left(4x\right)\cdot 4\,.$$

ЗАДАЧА 7. Провести полное исследование и построить графики функций

Схема исследования функции $y = f\left(x\right)$ устанавливает следующее:

1) область определения функции;

2) точки разрыва функции и поведение функции в их окрестности, вертикальные асимптоты;

3) поведение функции на бесконечности, наклонные асимптоты;

4) четность и нечетность, периодичность;

5) точки пересечения с осями координат, интервалы положительности и отрицательности функции (если возможно).

6) Интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

7) Интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

Найденные асимптоты строятся на координатной плоскости, затем наносятся характерные точки (экстремумы, точки перегиба), после чего строится сам график. Если поведение графика недостаточно ясно, то надо построить еще несколько точек графика, вычислив значения y для отдельных значений x.

Пример 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

1) Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Точки разрыва функции и вертикальных асимптот нет.

3) Исследуем поведение функции на бесконечности, найдем пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) \cong \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) \cong \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty.$$

Отложим найденные точки с координатами $(+\infty; +\infty)$ и $(-\infty; +\infty)$ на графике (рис. 2).

Наклонных асимптот $y = kx + b$ нет, так как

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x} = \infty.$$

4) Исследуем на четность и нечетность:

$$y(x) = x^4 - 2x + 1,\ y(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1.$$

Так как $y(-x) = y(x)$, то функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy.

Функция не является тригонометрической, поэтому периодичности нет.

5) Найдем точки пересечения с осью Oy:

$$y(0) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1.$$

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$y' = \left(x^4 - 2x^2 + 1\right)' = 4x^3 - 4x = 4x \cdot \left(x^2 - 1\right).$

$y' = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm 1$.

y' не существует – точек нет.

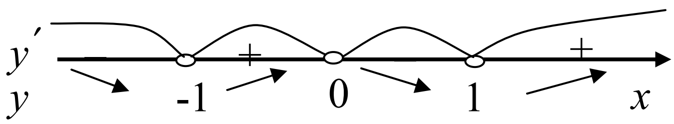
Отложим найденные критические точки на числовой оси и проверим знак y' в каждом интервале:

$y'(-2) = 4x \cdot \left(x^2 - 1\right) = 4 \cdot (-2) \cdot (4 - 1) = (-) \cdot (+) < 0,$

$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4x \cdot \left(x^2 - 1\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) = (-) \cdot (-) > 0,$

$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 4x \cdot \left(x^2 - 1\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) = (+) \cdot (-) < 0,$

$y'(2) = 4x \cdot \left(x^2 - 1\right) = 4 \cdot (2) \cdot (4 - 1) = (+) \cdot (+) > 0.$



Отмечаем на числовой оси интервалы возрастания и убывания. Функция убывает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$. Функция возрастает на промежутках $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

В критических точках производная меняет знак, поэтому имеем:

$x = -1$ – точка минимума, $x = 0$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем экстремальные значения:

$y_{min}(-1) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0,$

$y_{max}(0) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1,$

$y_{min}(1) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$

Отложим найденные точки экстремума на графике (см. рис 2).

7) Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

$y'' = \left(4x^3 - 4x\right)' = 12x^2 - 4.$

$y'' = 0$, когда $12x^2 - 4 = 0$, откуда $x^2 = \dfrac{1}{3}$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$.

Отложим критические точки на перегиб на числовой оси и найдем знак y'' в интервалах:

$y''(-1) = 12x^2 - 4 = 12 - 4 > 0$,

$y''(0) = 12x^2 - 4 = 0 - 4 < 0$,

$y''(1) = 12x^2 - 4 = 12 - 4 > 0$.

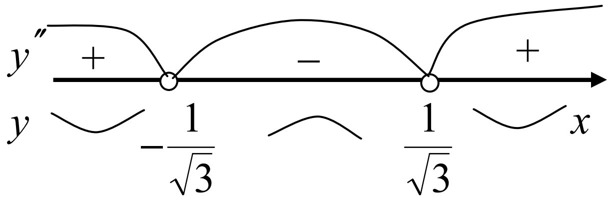


График вогнутый на промежутках $\left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}; +\infty\right)$,

выпуклый – на $\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}; \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

В точках $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$ вторая производная меняет знак, в них имеются точки перегиба. Найдем их ординаты:

$y\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 \approx 0{,}11 - 0{,}56 + 1 = 0{,}55$,

$y\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 \approx 0{,}11 - 0{,}56 + 1 = 0{,}55$.

Отложим точки перегиба с координатами $(-0{,}58; 0{,}55)$ и $(0{,}58; 0{,}55)$ на графике.

Соединим все точки с учетом выпуклости и вогнутости.

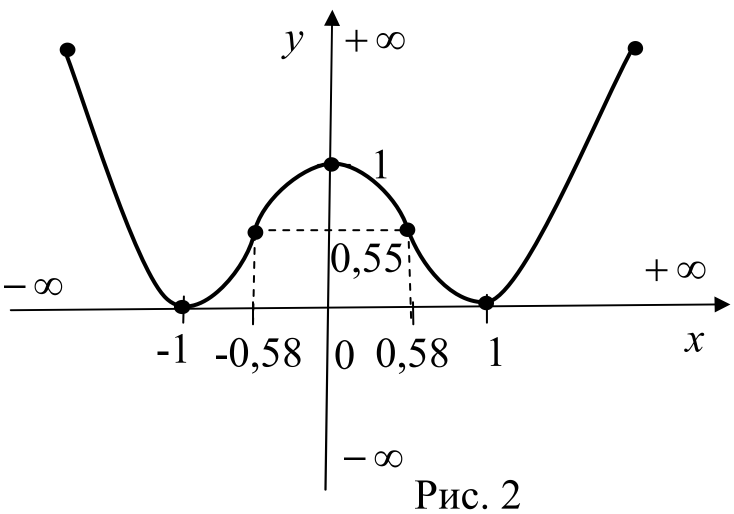


Рис. 2

Пример 2. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x\in(-\infty;\,4)\cup(4;\,\infty)$.

2) Точка разрыва функции: $x=4$.

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=\frac{7^2}{4-0-4}=\frac{49}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=\frac{7^2}{4+0-4}=\frac{49}{+0}=+\infty$$

Так как пределы бесконечны, то $x=4$ – вертикальная асимптота.

3) Найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{x(x-4)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9-x(x-4)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4}=10.$$

$y=x+10$ – уравнение наклонной асимптоты.

Изобразим асимптоты на графике (рис. 3).

4) Функция непериодичная, исследуем на четность и нечетность.

$y(x)=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$, $y(-x)=\dfrac{(-x+3)^2}{-x-4}$, так как условия четности и нечетности не выполняются, то функция – общего вида.

5) Найдем точки пересечения с осью Оy: $y(0)=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}=-\dfrac{9}{4}$,

и осью Оx: $\dfrac{(x+3)^2}{x-4}=0$, откуда $x=-3$.

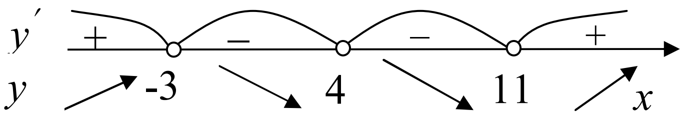
Имеем точки: $\left(0;-\dfrac{9}{4}\right)$ и $(-3;\,0)$ (см. рис. 3).

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$$y' = \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} \right)' = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}.$$

$y' = 0$, если $x^2 - 8x - 33 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 11$.

y' не существует при $x = 4$.



Определяем знаки y' в интервалах:

$$y'(-10) = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \frac{+}{+} > 0,\ \ y'(0) = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \frac{(-)}{(+)} < 0,$$

$$y'(10) = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \frac{(-)}{(+)} < 0,\ \ y'(20) = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} = \frac{(+)}{(+)} > 0.$$

В интервале $(-\infty; -3)$ $y' > 0$, функция возрастает.

В интервалах $(-3; 4)$ и $(4; 11)$ $y' < 0$, функция убывает.

В интервале $(11; \infty)$ $y' > 0$, функция возрастает.

$x = -3$ – точка максимума, $y(-3) = 0$,

$x = 11$ – точка минимума $y(11) = 28$ (см. рис. 3).

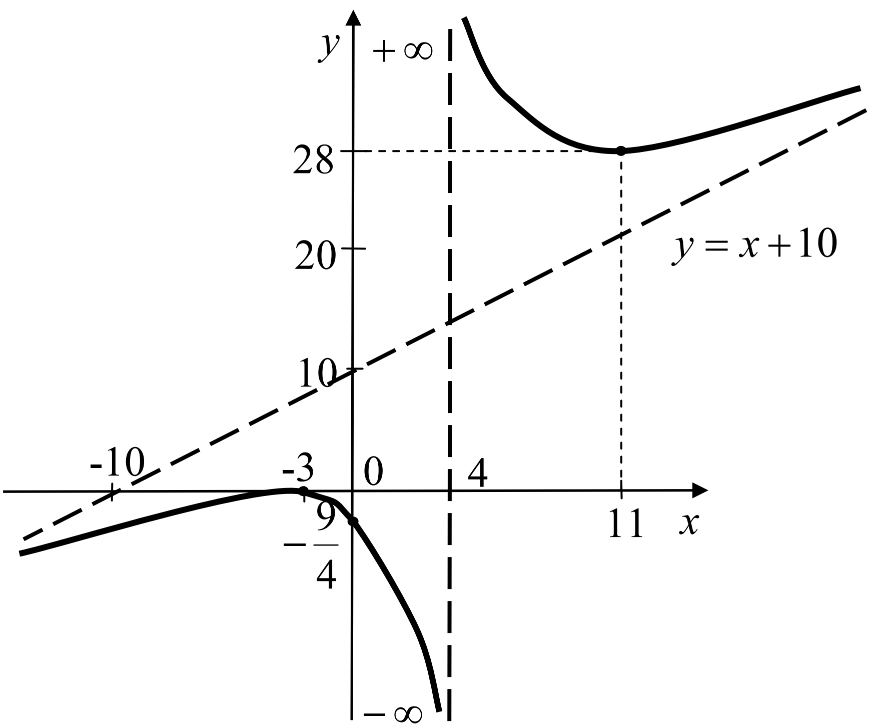


Рис. 3

7) Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} \right)' = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

$y'' = 0$ – нет точек, y'' не существует при $x = 4$.

В интервале $(-\infty; 4)$ $y'' < 0$, кривая выпукла; в интервале $(4; \infty)$ $y'' > 0$, кривая вогнута. Так как при $x = 4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

ЗАДАЧА 8. Заданы функция $z = 5x^2 y - 7xy^2 + 5xy$, точка $A(1,2)$ и вектор $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$. Найти: 1) частные производные, 2) градиент функции z в точке $A(1,2)$ и его модуль, 3) производную функции z в точке $A(1,2)$ по направлению вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$.

1) Частную производную z'_x найдем как производную функции $z = f(x, y)$ по переменной x, полагая $y = const$.

$$z'_x = \left(5x^2 y - 7xy^2 + 5xy\right)'_x = 5y \cdot 2x - 7y^2 \cdot 1 + 5y \cdot 1 = 10xy - 7y^2 + 5y.$$

Частную производную z'_y находим по переменной y, полагая $x = const$.

$$z'_y = \left(5x^2 y - 7xy^2 + 5xy\right)'_y = 5x^2 \cdot 1 - 7x \cdot 2y + 5x \cdot 1 = 5x^2 - 14xy + 5x.$$

2) Градиент функции – это вектор, в направлении которого функция имеет наибольшую скорость изменения в заданной точке. По определению:

$$\overrightarrow{grad\ z} = z'_x \cdot \vec{i} + z'_y \cdot \vec{j}.$$

Для нахождения градиента функции $z = 5x^2 y - 7xy^2 + 5xy$ в точке $A(1,2)$ найдем значения частных производных в этой точке. Подставим координаты точки $A(1,2)$ в найденные частные производные.

$$z'_x(1; 2) = 10xy - 7y^2 + 5y = 10 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 20 - 28 + 10 = 2;$$

$$z'_y(1; 2) = 5x^2 - 14xy + 5x = 5 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 5 - 28 + 5 = -18.$$

Получаем: $\overrightarrow{grad\ z}\Big|_A = 2 \cdot \vec{i} - 18 \cdot \vec{j}$.

Модуль вектора градиента функции равен наибольшей скорости изменения функции в заданной точке. Модуль этого вектора равен:

$$\left|\overrightarrow{grad\ z}\Big|_A\right| = \sqrt{2^2 + (-18)^2} = \sqrt{328} \approx 18{,}1.$$

3) Для нахождения производной в точке A по направлению вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ найдём направляющие косинусы вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$:

$$cos\,\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad cos\,\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Производная функции по заданному направлению

$$z'_{\vec{a}}(A) = z'_x(A) \cdot cos\,\alpha + z'_y(A) \cdot cos\,\beta.$$

Получаем:

$$z'_{\vec{a}} = 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{22}{\sqrt{5}} \approx -9{,}8.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

ЗАДАЧА 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

1.1.	$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x-y-4z=1 \\ 4x-z=1 \end{cases}$	1.6.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-2y-z=1 \\ 4x+3y+z=2 \end{cases}$
1.2.	$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+y+4z=5 \\ 4x-y=3 \end{cases}$	1.7.	$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y=4 \\ 4x+3\text{y}-z=4 \end{cases}$
1.3.	$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+y=3 \\ 4x-3y-3z=3 \end{cases}$	1.8.	$\begin{cases} 4x+y=4 \\ 2x-2y-z=1 \\ 3y+z=3 \end{cases}$
1.4.	$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 3x-y-z=1 \\ 2x-2y-z=6 \end{cases}$	1.9.	$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 3x-y+6z=1 \\ 4x+z=1 \end{cases}$
1.5.	$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 3x+3y-z=0 \\ 2x+y=2 \end{cases}$	1.10.	$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+2y-4z=1 \\ 4x+3y-z=1 \end{cases}$

ЗАДАЧА 2. Выполнить операции с матрицами.

2.1.	$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. **Найти:** $3B$, $2A–3C$, $A\cdot B$
2.2.	$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. **Найти:** $–3B$, $2A+4C$, $C\cdot B$
2.3.	$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **Найти:** $5C$, $2A–4B$, $A\cdot B$

2.4.	$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 6 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}$. **Найти:** $-3C$, $2B-3A$, $B\cdot C$
2.5.	$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 6 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. **Найти:** $-4A$, $2B+3C$, $B\cdot A$
2.6.	$A=\begin{pmatrix}-3 & 10 & 1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. **Найти:** $-5A$, $2C-3B$, $B\cdot C$
2.7.	$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 1\\ -5 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$. **Найти:** $-4C$, $2A-3B$, $C\cdot A$
2.8.	$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 1\\ -5 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$. **Найти:** $-4C$, $3B-2A$, $C\cdot B$
2.9.	$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & -3\end{pmatrix}$. **Найти:** $3A$, $2B-4C$, $A\cdot C$
2.10.	$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -5 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$. **Найти:** $4B$, $3A+2C$, $B\cdot C$

ЗАДАЧА 3. Вершины треугольника находятся в заданных точках. Построить треугольник.

3.1.	$A(-2;4)$, $B(3;1)$, $C(10;7)$ **Найти:** 1) длину $\lvert AB\rvert$; 2) угол А; уравнения прямых: 3) (AB) 4) высоты (CH), 5) медианы (AM), 6)пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от C до (AB); 8) площадь
3.2.	$A(-3;-2)$, $B(14;4)$, $C(6;8)$ **Найти:** 1) длину $\lvert BC\rvert$, 2) угол B; уравнения прямых: 3) (BC), 2) 4) высоты (AH), 5) медианы (BM), 6)пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от A до (BC); 8) площадь
3.3.	$A(1;7)$, $B(-3;-1)$, $C(11;-3)$ **Найти:** 1) длину $\lvert AC\rvert$; 2) угол C; уравнения прямых:

	3) (AC) 4) высоты (BH), 5) медианы (AM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от B до (AC); 8) площадь
3.4.	$A(1;0)$, $B(-1;4)$, $C(9;5)$ **Найти:** 1)длину $\lvert AB \rvert$; 2) угол B; уравнения прямых: 3) (AB) 4) высоты (CH), 5) медианы (BM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от C до (AB); 8) площадь
3.5.	$A(1;\text{-}2)$, $B(7;1)$, $C(3;7)$ **Найти:** 1)длину $\lvert BC \rvert$, 2) угол C; уравнения прямых: 3) (BC), 2) 4) высоты (AH), 5) медианы (CM), 6)пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от A до (BC); 8) площадь
3.6.	$A(-2;-3)$, $B(1;6)$, $C(6;1)$ **Найти:** 1)длину $\lvert AC \rvert$; 2) угол A; уравнения прямых: 3) (AC) 4) высоты (BH), 5) медианы (CM), 6)пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от B до (AC); 8) площадь
3.7.	$A(-4;2)$, $B(-6;6)$, $C(6;2)$ **Найти:** 1)длину $\lvert AB \rvert$; 2) угол A; уравнения прямых: 3) (AB) 4) высоты (CH), 5) медианы (BM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от C до (AB); 8) площадь
3.8.	$A(4;-3)$, $B(7;3)$, $C(1;10)$ **Найти:** 1)длину $\lvert BC \rvert$, 2) угол B; уравнения прямых: 3) (BC), 2) 4) высоты (AH), 5) медианы (BM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от A до (BC); 8) площадь
3.9.	$A(4;-4)$, $B(8;2)$, $C(3;8)$ **Найти:** 1)длину $\lvert AC \rvert$; 2) угол C; уравнения прямых: 3) (AC) 4) высоты (BH), 5) медианы (AM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от B до (AC); 8) площадь
3.10.	$A(-3;-3)$, $B(5;-7)$, $C(7;7)$ **Найти:** 1)длину $\lvert AB \rvert$; 2) угол B; уравнения прямых: 3) (AB) 4) высоты (CH), 5) медианы (AM), 6) пересечение высоты и медианы; 7) расстояние от C до (AB); 8) площадь

ЗАДАЧА 4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить линию.

4.1.	а) $x^2 - y + 2x + 5 = 0$, б) $x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0$, в) $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$

4.2.	а) $x^2+y^2+4x=0$, б) $x^2-y-2x-5=0$, в) $x^2-y^2+2x-8=0$
4.3.	а) $x^2+y+4x+5=0$, б) $x^2-y^2-6x+5=0$, в) $x^2+y^2+6x+5=0$
4.4.	а) $x^2-3y+2x+1=0$, б) $x^2-2y^2+2x-3=0$, в) $x^2+y^2-4x-5=0$
4.5.	а) $x^2+2y+2x+5=0$, б) $x^2-y^2+2x+3=0$, в) $x^2+4y^2-16=0$
4.6.	а) $4x-y^2+2y+3=0$, б) $4x^2-y^2+16=0$, в) $x^2+4y^2-4x=0$
4.7.	а) $x^2+3y+2x+2=0$, б) $4(x-1)^2-9y^2+36=0$, в) $4x^2+y^2+4y-8=0$
4.8.	а) $x-y^2-4y+6=0$, б) $2x^2-y^2-2y+8=0$, в) $4x^2+16x+9y^2-20=0$
4.9.	а) $2x^2-y-4x+8=0$, б) $4x^2+y^2+4y=0$, в) $-4x^2+y^2-2y-3=0$
4.10.	а) $x^2+2x+y+4=0$, б) $9x^2-54x+4y^2+45=0$, в) $x^2+4x-4y^2=0$

ЗАДАЧА 5. Найти пределы указанных функций.

5.1.	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2-9x+20}$
5.2.	а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8x+6}{x^2-9}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{x^2-9}$
5.3.	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-8x-6}{x^3-1}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x-\sqrt{x}}$
5.4.	а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9x+20}{x^3-1}$
5.5.	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-4x}{x^2-4x+4}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$
5.6.	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-4}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+7x}{7x^2+2x-8}$
5.7.	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^2-3x+2}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3(x+1)}$,
5.8.	а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^3(x+1)}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x^3(x-2)}$
5.9.	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-4x-8}{x^2-4}$,	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-4}$
5.10.	а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-4x-8}{x^2-1}$,	б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^2-4}{x-1}$

ЗАДАЧА 6. Найти производные указанных функций.

6.1.	а) $\left(2x^3-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+5\right)'$	б) $\left(\dfrac{tg(\sqrt{x})}{ln(3x)}\right)'$	в) $\left(tg^3(4x-1)\right)'$
6.2.	а) $\left(3x^5-6\sqrt[5]{x^4}+2x\right)'$	б) $\left(sin(x^3)\cdot e^{\cos x}\right)'$	в) $\left(\dfrac{1}{cos^2(5x-1)}\right)'$

6.3.	а) $\left(5x^6-\frac{3}{x^2}-4x\right)'$	б) $\left(\frac{sin^5 x}{tg(3x)}\right)'$	в) $\left(cos\left(\sqrt{x^3+1}\right)\right)'$
6.4.	а) $\left(3x^2-\frac{5}{\sqrt[4]{x}}+10x\right)'$	б) $\left(sin\left(x^3\right)\cdot ln(tgx)\right)'$	в) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{sin^2(1-3x)}}\right)'$
6.5.	а) $\left(6x^7-\frac{10}{x^3}+7\sqrt{x}\right)'$	б) $\left(\frac{cos^6 x}{sin\left(x^4+1\right)}\right)'$	в) $\left(tg\sqrt{6x+3}\right)'$
6.6.	а) $\left(4x^8-6\sqrt[5]{x^2}-15\right)'$	б) $\left(ln^3 x\cdot cos\left(3x^5\right)\right)'$	в) $\left(ctg^{10}(2x+1)\right)'$
6.7.	а) $\left(7x^4-\frac{5}{x}+25x\right)'$	б) $\left(\frac{ln^3 x}{(2x+1)^5}\right)'$	в) $\left(\cos^5(4x-1)\right)'$
6.8.	а) $\left(5x^3-4\sqrt{x}+10\right)'$	б) $\left(ln(7x-3)\cdot e^{x^2}\right)'$	в) $\left(\frac{1}{sin^2(3x-1)}\right)'$
6.9.	а) $\left(2x^9-\frac{4}{\sqrt[7]{x^3}}-5x\right)'$	б) $\left(\frac{sin(6x-1)}{ln\left(x^2+1\right)}\right)'$	в) $\left(\sqrt[7]{cos^5(2x)}\right)'$
6.10.	а) $\left(8x^{10}-\frac{3}{x^4}+6\right)'$	б) $\left(cos(4x-1)\cdot e^{sin\,x}\right)'$	в) $\left(sin\left(\sqrt{2x+1}\right)\right)'$

<u>ЗАДАЧА 7.</u> Провести полное исследование и построить графики функций

7.1.	а) $y=1-8x^3-3x^8$	б) $y=\frac{2x+1}{x-2}$
7.2.	а) $y=3x^5-15x^3+1$	б) $y=\frac{2x^2}{x-1}$
7.3.	а) $y=x^4-4x^3+3$	б) $y=\frac{3x^2}{x+2}$
7.4.	а) $y=2-20x^2-x^5$	б) $y=\frac{3x+2}{x+4}$

7.5.	а) $y = 2 - x^7 - 7x$	б) $y = \frac{4x^2}{3-x}$
7.6.	а) $y = 6x^9 - 9x^6 + 1$	б) $y = \frac{3x}{x-2}$
7.7.	а) $y = 4x^3 + 6x^2 + 3$	б) $y = \frac{-3x^2}{x-1}$
7.8.	а) $y = -3x^4 - 4x^3 + 1$	б) $y = \frac{4-2x}{x+3}$
7.9.	а) $y = -6x^7 + 7x^6 - 3$	б) $y = \frac{-2x^2}{x-3}$
7.10.	а) $y = 3x^8 - 4x^6 + 2$	б) $y = \frac{2-3x}{x+1}$

ЗАДАЧА 8. Заданы функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \vec{j}$. Найти: 1) частные производные, 2) градиент функции z в точке A и его модуль, 3) производную функции z в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

8.1.	$z = 3x^4y - 5xy^3 + 2xy$, $A(-2,1)$, $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 4\vec{j}$
8.2.	$z = 4x^5y^2 - 5x^2y - 6xy$, $A(-1,1)$, $\vec{a} = -3 \cdot \vec{i} - 2\vec{j}$
8.3.	$z = 2x^3y + 5x^3y^2 + 3xy$, $A(-3,-1)$, $\vec{a} = -3 \cdot \vec{i} + 5\vec{j}$
8.4.	$z = 3x^2y + 5xy^4 + 6xy$, $A(2,-1)$, $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 5\vec{j}$
8.5.	$z = 4x^3y^2 + 5x^3y + 4xy$, $A(3,-2)$, $\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} + 5\vec{j}$
8.6.	$z = 2x^5y^3 - 4x^2y^3 - 2xy$, $A(2,-3)$, $\vec{a} = -4 \cdot \vec{i} + 3\vec{j}$
8.7.	$z = 3x^2y + 2xy^4 - 5xy$, $A(3,1)$, $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 4\vec{j}$
8.8.	$z = 5xy^3 + 3x^2y^3 + 8xy$, $A(-1,3)$, $\vec{a} = -5 \cdot \vec{i} + 3\vec{j}$
8.9.	$z = 2x^5y^3 - 2xy^4 + 5xy$, $A(2,-1)$, $\vec{a} = 5 \cdot \vec{i} + 2\vec{j}$
8.10.	$z = 6x^2y - 3x^2y^3 - 7xy$, $A(-2,3)$, $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j}$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Раздел 1. Линейная алгебра

1. Определители второго и третьего порядка, их свойства. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу).
2. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.
3. Исследование систем линейных алгебраических уравнений, метод Гаусса.
4. Действия с матрицами, обратная матрица, ранг матрицы.

Раздел 2. Векторная алгебра

1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Длина вектора и отрезка, направляющие косинусы. Нормированный вектор.
2. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности и коллинеарности векторов.
3. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл.
4. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов

Раздел 3. Аналитическая геометрия

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.
2. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.
3. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами.

4 Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

5. Канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой через две точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.
6. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности.

Раздел 4. Введение в математический анализ функции одной переменной

1. Функция одной переменной, способы задания, область определения, характеристики поведения. Сложная функция. Основные элементарные функции и их графики.
2. Предел функции: на бесконечности, в конечной точке, односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их взаимосвязь и свойства. Основные теоремы о пределах.
3. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
4. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику.

2. Правила дифференцирования. Таблица производных. Производная сложной функции.

3. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

4. Производные высших порядков. Правило Лопиталя.

5. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи.

6. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции.

7. Общая схема исследования функции и построение её графика.

Раздел 6. Функции нескольких переменных

1. Функция двух переменных: область определения, частные производные, производная по направлению, градиент.

2. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.

3. Экстремум функции двух переменных.