МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
И. А. Ермакова
В. А. Гоголин

МАТЕМАТИКА

Методические указания к контрольной работе № 2 для студентов заочной формы обучения

Рекомендованы учебно-методической комиссией направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» в качестве электронного издания для самостоятельной работы

Кемерово 2017

Рецензент

В. М. Волков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики

Ермакова Инна Алексеевна
Гоголин Вячеслав Анатольевич
Математика [Электронный ресурс]: методические указания к контрольной работе № 2 для студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» заочной формы обучения / сост.: И. А. Ермакова, В. А. Гоголин; КузГТУ. – Кемерово, 2017.

Приводятся задания и методические указания по их решению, а также список вопросов для подготовки к экзамену.

Задания в контрольной работе охватывают все темы, изучаемые во 2 семестре по дисциплине «Математика». Выполнение заданий позволит студенту качественно подготовиться к экзамену.

Дисциплина «Математика» изучается в течение трех семестров на 1-ом и 2-м курсе. Во втором семестре 1-го курса студенты заочной формы обучения выполняют контрольную работу №2.

Студент выполняет контрольную работу, выбирая вариант задания по последней цифре зачетной книжки. Если последняя цифра равна 0, то студент решает вариант №10. Работа, выполненная не по своему варианту, не проверяется.

Работу следует выполнять в рукописном виде. Задания писать обязательно.

Решения задач должны быть выполнены и оформлены аналогично тому, как показано в методических указаниях. При отсутствии письменных объяснений, студент должен быть готов дать устные пояснения к решению задач.

ПРОГРАММА 2 СЕМЕСТРА

7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 7.1. Неопределённый интеграл. Таблица и свойства неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: функции $f(kx+b)$, замена переменной, по частям, дробно-рациональных функций. 7.2. Определённый интеграл. Определение, геометрический смысл и свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла. Приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур, объёма тела вращения. 7.3. Несобственные интегралы 7.4. Приближенное интегрирование: Метод прямоугольников, трапеций, Симпсона. 7.5. Двойной интеграл. Определение и свойства двойного интеграла. Вычисление. Геометрические приложения.
8. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ 8.1. Комплексные числа. Формы записи и перевод из одной формы в другую. Действия с комплексными числами. Решение уравнений. 8.2. Определение функции комплексного переменного. 8.3. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность и особые точки.
9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения, задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения, уравнения Бернулли. 9.2. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения, задача Коши. Дифференциальные уравнения, допускающие

понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. 9.3. Дифференциальные уравнения высших порядков.
10. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ 10.1. Элементы теории множеств. Запись множества, мера плоского множества. 10.2. Отображение множеств. 10.3. Метрические пространства.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

ЗАДАЧА 1. Найти неопределенные интегралы.

Следует запомнить основные интегралы и их свойства:

1. $\int dx = x + C.$	6. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	9. $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1 + f_2)dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx.$$

Рассмотрим применение формулы №2 таблицы интегралов.

Пример 1.

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Пример 3.

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3x^{4/3}}{4} + C$$

Пример 4.

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx = \int x^{-2/5} dx = \frac{x^{-2/5+1}}{-2/5+1} + C = \frac{x^{3/5}}{3/5} + C = \frac{5x^{3/5}}{3} + C$$

Рассмотрим применение основных свойств интегралов.

Пример 5.

$$\int 2xdx = 2\int x^1 dx = 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = 2\frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$$

Пример 6.

$$\int (\cos x + tgx)dx = \int \cos xdx + \int \frac{1}{x}dx + C = \sin x + \ln x + C$$

Пример 7.

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C$$

Пример 8.

$$\int \left(6x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\right)dx =$$

$$= 6\int x^3 dx - 3\int x^{-1/2} dx + 2\int dx = 6\frac{x^4}{4} - 3\cdot 2x^{1/2} + 2x + C$$

Рассмотрим применение формулы: $\int f(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Другими словами, если в подынтегральной функции x умножен на число k, то перед интегралом следует писать множитель $\frac{1}{k}$.

Пример 9.

$$\int sin(5x)dx = -\frac{1}{5}cos(5x) + C$$

Пример 10.

$$\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}ln|2x+1| + C$$

Пример 11.

$$\int (3x+2)^4 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^5}{5} + C$$

Важным способом интегрирования является подведение под знак дифференциала.

Дифференциал функции одной переменной u равен произведению ее производной на dx, то есть: $du = u' \cdot dx$.

Например, $u = x^2$, $du = 2x \cdot dx$.

Вид интеграла не изменится, если вместо x и dx в нем будут присутствовать функция $u=f(x)$ и du, то есть: $\int f(u)\cdot du=F(u)+C$.

Пример 12.

$$\int \sin^5 x\cdot\cos x\cdot dx=\left\langle \begin{matrix} u=\sin x \\ du=\cos x\cdot dx \end{matrix}\right\rangle=$$

$$=\int u^5 du=\frac{u^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C$$

Пример 13.

$$\int x\cdot\sin\left(x^2+1\right)\cdot dx=\left\langle \begin{matrix} u=x^2+1 \\ du=2xdx \end{matrix}\right\rangle=\frac{1}{2}\int \sin u\cdot du=-\frac{1}{2}\cos u=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+C.$$

<u>**ЗАДАЧА 2**</u>. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

Для решения этой задачи следует использовать определенный интеграл, вычисление которого производится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Рассмотрим применение этой формулы.

Пример 1.

$$\int_1^2 x^2 dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}\approx 2{,}3.$$

Здесь вместо x подставляем сначала верхнюю границу $x=2$, затем нижнюю границу $x=1$, между выражениями ставим знак «минус».

Пример 2.

$$\int_{-1}^{3}(4x+3)dx=\int_{-1}^{3}4xdx+\int_{-1}^{3}3dx=4\int_{-1}^{3}xdx+3\int_{-1}^{3}dx=$$

$$=4\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{3}+3x\Big|_{-1}^{3}=\left(2\cdot 3^2-2(-1)^2\right)-\left(3\cdot 3-3\cdot(-1)\right)=16-12=4.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2x$, $y = 3 - x^2$.

Площадь фигуры, расположенной между двумя линиями находится по формуле:

$$S = \int_a^b (y_в - y_н)dx,$$

где $y_в$ и $y_н$ – уравнения соответственно верхней и нижней линий, ограничивающих фигуру; a и b – точки пересечения линий.

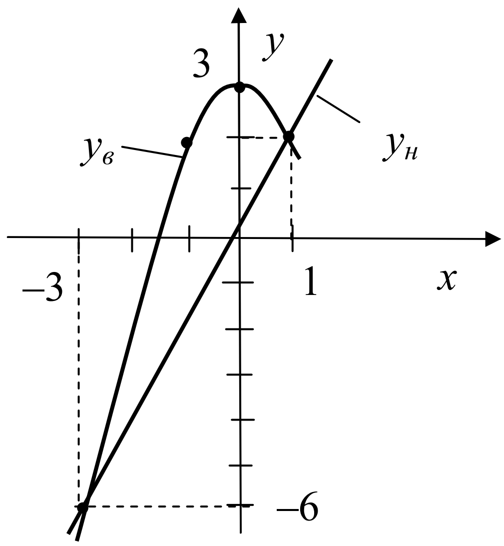
Найдем точки пересечения этих линий, для чего приравняем правые части уравнений:

$$2x = 3 - x^2 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Найдем дискриминант и корни: $D = 2^2 - 4(-3) = 16$,

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3,\; x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1.$$

Построим линии между точками пересечения, для чего зададим несколько значений x и найдем соответствующие y.



1) $y = 2x$, это прямая, построим ее по двум точкам.

x	-3	1
y	-6	2

2) $y = 3 - x^2$, это парабола, возьмем несколько точек.

x	-3	-1	0	1
y	-6	2	3	2

Из рисунка видим, что

$y_в = 3 - x^2$, $y_н = 2x$.

Найдем площадь:

$$S = \int_a^b (y_в - y_н)dx = \int_{-3}^{1} \left(3 - x^2 - 2x\right) \cdot dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(3 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - 1^2\right) - \left(3 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2\right) =$$

$$= 1\frac{2}{3} - (-9 + 9 - 9) = 1\frac{2}{3} + 9 \approx 10{,}7 \text{ ед.кв.}$$

ЗАДАЧА 3. Выполнить действия с комплексными числами.

Комплексным числом называется упорядоченная пара чисел: $z=(x,\,y)$, расположенных на комплексной плоскости, где x и y – координаты точки.

Существует три формы записи одного и того же комплексного числа:

– алгебраическая: $z=x+iy$;

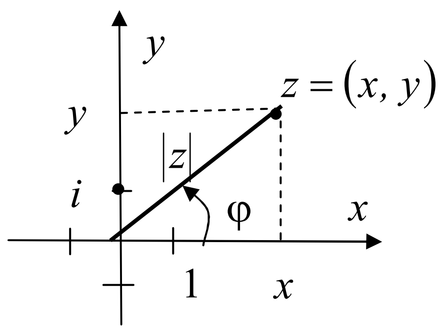
– тригонометрическая: $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

– показательная: $z=|z|\cdot e^{i\varphi}$,

где x – действительная часть комплексного числа;

y – мнимая часть комплексного числа;

$|z|$ – модуль комплексного числа, равен расстоянию от точки до начала координат, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$;



φ – аргумент комплексного числа – угол между осью Оx и отрезком, соединяющим точку $z=(x,\,y)$ с началом координат, отсчитывается против часовой стрелки.

Ось Оx называется действительной осью, ось Оy – мнимой. Единичный отрезок на оси Оy равен мнимой единице i.

Сложение комплексных чисел производится только в алгебраической форме. При этом действительные и мнимые части числа складываются между собой.

Пример 1.

$z_1=2+3i$, $z_2=-5+4i$,

сумма

$z_1+z_2=(2+3i)+(-5+4i)=(2-5)+(3i+4i)=-3+7i$.

Пример 2.

$5e^{30i}+10e^{-20i}$.

Здесь оба числа записаны в показательной форме, и их нельзя сложить без преобразований. Переведем оба числа в алгебраическую форму, используя тригонометрическую форму записи:

$$z=|z|\cdot e^{i\varphi}=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|\cdot\cos\varphi+i\cdot|z|\cdot\sin\varphi.$$

$$5e^{30i}=5\left(cos\,30^0+i\cdot sin 30^0\right)=5\cdot(0{,}866+i\cdot 0{,}5)=4{,}330+2{,}5i.$$

Значения синусов и косинусов найдем с помощью калькулятора с требуемой точностью. В данном случае берем три знака после запятой.

$$10e^{-20i}=10\cdot\left(cos\left(-20^0\right)+i\cdot sin\left(-20^0\right)\right)=10\cdot(0{,}940+i\cdot(-0{,}342))=$$
$$=9{,}4-3{,}42i.$$

Теперь можно выполнить сложение:

$$5e^{30i}+10e^{-20i}=(4{,}330+2{,}5i)+(9{,}4-3{,}42i)=13{,}73-0{,}92i.$$

Умножение и деление комплексных чисел в показательной форме производится следующим образом:

$$z_1\cdot z_2=\left(|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}\right)\cdot\left(|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}\right)=|z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|\cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

То есть, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Пример 3.

$$z_1\cdot z_2=\left(3e^{15i}\right)\cdot\left(4e^{30i}\right)=3\cdot 4\cdot e^{i(15+30)}=12e^{45i}.$$

Пример 4.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3e^{20i}}{5e^{45i}}=\frac{3}{5}\cdot e^{i(20-45)}=0{,}6e^{-25i}$$

Пример 5.

$$\frac{(2-3i)+(5+6i)}{8e^{20i}}$$

(Сначала выполним сложение в числителе.)

$$\frac{(2-3i)+(5+6i)}{8e^{20i}}=\frac{7+3i}{8e^{20i}}=$$

(Далее преобразуем числитель в показательную форму: $z=x+iy=|z|\cdot e^{i\varphi}$. Найдем модуль $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{7^2+3^3}=7{,}616$.

Аргумент найдем по формулам: $\varphi = arctg\frac{y}{x}$, если $x > 0$ или $\varphi = arctg\frac{y}{x} + 180^0$, если $x < 0$. Получаем: $\varphi = arctg\frac{3}{7} = 23{,}199^0$.)

$$= \frac{7{,}616e^{23{,}199i}}{8e^{20i}} = 0{,}952e^{3{,}199i}.$$

Пример 6.

$$\frac{10e^{-40i}}{(2+3i)+(-5+2i)} = \frac{10e^{-40i}}{-3+5i} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} |z| = \sqrt{(-3)^2 + 5^5} = 5{,}831 \\ \varphi = arctg\frac{-3}{5} + 180^0 = 149{,}036^0 \end{array} \right\rangle = \frac{10e^{-40i}}{5{,}831e^{149{,}036i}} = 1{,}715e^{-189{,}036i}.$$

<u>ЗАДАЧА 4.</u> Решить уравнения.

При решении уравнений следует учитывать, что

$i^2 = -1$, и $\sqrt{-1} = i$.

Пример 1.

1) $z^2 - 4 = 0 \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{4} = \pm 2$,

Данное уравнение имеет два действительных корня.

Пример 2.

2) $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow$

$z = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4\cdot(-1)} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$.

Данное уравнение имеет два мнимых корня.

Сделаем проверку, подставим найденные корни в исходное уравнение: $(\pm 2i)^2 + 4 = (\pm 2)^2 \cdot i^2 + 4 = -4 + 4 = 0$ – верно.

Пример 3.

$z^2 + 6z + 13 = 0$

Найдем дискриминант: $D = 6^2 - 4\cdot 13 = -16$.

Тогда $z_1 = \frac{-6-\sqrt{-16}}{2} = \frac{-6-\sqrt{16\cdot(-1)}}{2} = \frac{-6-4i}{2} = -3-2i$,

$$z_2 = \frac{-6+\sqrt{-16}}{2} = \frac{-6+\sqrt{16\cdot(-1)}}{2} = \frac{-6+4i}{2} = -3+2i.$$

Уравнение имеет два комплексных корня.

Применение комплексных чисел позволяет находить корни любых уравнений, при этом выполняется правило: уравнение n-го порядка имеет n корней.

Пример 4.

$z^3 - 1 = 0$, это уравнение 3-го порядка, найдем три корня.

Разложим левую часть по формуле:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, или $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$, отсюда

$z - 1 = 0$ или $(z^2 + z + 1) = 0$.

Имеем: $z_1 = 1$. Еще два корня найдем из квадратного уравнения: $z^2 + z + 1 = 0$. Найдем $D = 1^2 - 4\cdot 1 = -3$,

$$z_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2},\ z_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Пример 5.

$z^4 - 1 = 0$, это уравнение 4-го порядка, найдем четыре корня.

Разложим левую часть по формуле: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$z^4 - 1 = (z^2 - 1)\cdot(z^2 + 1) = 0$, тогда

$z^2 - 1 = 0$ или $z^2 + 1 = 0$.

$z^2 = 1 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1$

$z^2 = -1 \Rightarrow z_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

<u>ЗАДАЧА 5.</u> Решить дифференциальные уравнения.

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1-го порядка называется уравнение, содержащее первую производную y' неизвестной функции $y = f(x)$, которую надо найти. Основным видом ДУ 1 порядка являются **<u>уравнения с разделяющимися переменными</u>**, которые имеют вид: $y' = \varphi(x)\cdot\omega(y)$. Алгоритм решения этих уравнений выглядит следующим образом:

1) записывается, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$;

2) выражения с x переносятся в одну сторону, с y – в другую, то есть разделяются;

3) интегрируются обе части равенства.

Пример 1.

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{\sqrt{y}}{x} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{x} \cdot dx.$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{1}{x} \cdot dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int y^{-1/2} \cdot dy = \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2y^{1/2} = 2\sqrt{y},$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = ln|x| + C,$$

приравниваем полученные выражения и получаем

ответ: $2\sqrt{y} = ln|x| + C$

Пример 2.

$$y' = \frac{ln\, x}{(2y+1)^5 x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ln\, x}{x(2y+1)^5} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{ln\, x}{x(2y+1)^5} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad (2y+1)^5 dy = \frac{ln\, x}{x} \cdot dx$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$\int (2y+1)^5 dy = \int \frac{ln\, x}{x} \cdot dx.$$

$$\int (2y+1)^5 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2y+1)^6}{6},$$

$$\int \frac{ln\, x}{x} \cdot dx = \left\langle \begin{matrix} u = ln\, x \\ du = \dfrac{1}{x} \cdot dx \end{matrix} \right\rangle = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{ln^2 x}{2} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{(2y+1)^6}{6}=\frac{ln^2 x}{2}+C$.

Дифференциальным уравнением (ДУ) 2-го порядка называется уравнение, содержащее вторую производную y'' неизвестной функции $y=f(x)$, которую надо найти.

Рассмотрим решение уравнений $y''=f(x)$, **допускающих понижение порядка**. Путем интегрирования, последовательно находятся первая производная y', а затем функция y.

Пример 3.

$y''=sin 5x$,

$y'=\int sin 5x\cdot dx=-\frac{1}{5}cos 5x+C_1$,

$$y=\int\left(-\frac{1}{5}cos 5x+C_1\right)dx=-\frac{1}{5}\int cos 5x\cdot dx+C_1\int dx=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}sin\, x+C_1x+C_2$$

Рассмотрим решение **линейных однородных** ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которые имеют вид:

$$y''+a_1y'+a_2y=0.$$

Для их решения составляется квадратное характеристическое уравнение, для чего y'' заменяется на k^2, y' – на k, y – на 1.

Общее решение однородного уравнения y_{oo} находится из табл. 1.

Таблица 1

Вид общего решения y_{oo}

N	Дискриминант	Корни	y_{oo}
1	$D>0$	Два действительных корня k_1 и k_2	$y_{oo}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2	$D=0$	Один действительный корень k	$y_{oo}=C_1e^{kx}+C_2e^{kx}\cdot x$
3	$D<0$	Корни комплексные $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y_{oo}=e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x+C_2 sin\beta x)$

Пример 4.

$y'' - 25y' = 0$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его.

$k^2 - 25k = k(k-25) = 0$, откуда имеем два действительных корня: $k_1 = 0$, $k_2 = 25$.

Записываем **ответ** (Табл. 1, строка 1):

$y_{oo} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{25x} = C_1 + C_2 e^{25x}$.

Пример 5.

$y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0$, $D = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$, (Табл. 1, строка 2)

$k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$, имеем один действительный корень.

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{-1x} \cdot x$.

Пример 6.

$y'' + 6y' + 10y = 0$

$k^2 + 6k + 10 = 0$, $D = 6^2 - 4 \cdot 10 = -4 < 0$, (Табл. 1, строка 3)

$k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$, корни комплексные, $\alpha = -3$, $\beta = 1$.

Ответ: $y_{oo} = e^{-3x}(C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x)$.

В контрольной работе требуется найти общее решение **линейного неоднородного** ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которые имеют вид:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Здесь правая часть не равна нулю и представляет собой функцию от x специального вида.

Общее решение линейного неоднородного уравнения находится как сумма:

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн},$$

где y_{oo} – общее решение соответствующего однородного уравнения, его нахождение рассмотрено выше;

$y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения, вид которого находится из табл. 2.

Пример 7.

$y'' - 4y' + 3y = 5x$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения, для чего составим характеристическое уравнение:

$k^2 - 4k + 3 = 0 \;\Rightarrow\; D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$.

Имеем два действительных корня: $k_1 = \dfrac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$, $k_1 = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$. По табл. 1 (строка 1) записываем:

$y_{oo} = C_1 e^{1x} + C_2 e^{3x}$.

Определяем с помощью табл. 2 вид правой части неоднородного уравнения.

$f(x) = 5x = P_1(x)$ – многочлен первой степени (табл. 2, строка 1.2).

Так как $k_1 = 1 \neq 0$, $k_2 = 3 \neq 0$, то $y_{чн} = Ax + B$.

Найдем первую и вторую производные: $y' = (Ax + B)' = A$; $y'' = A' = 0$.

Подставим $y = y_{чн} = Ax + B$, $y' = A$ и $y'' = 0$ в исходное уравнение:

$0 - 4A + 3 \cdot (Ax + B) = 5x$.

Раскроем скобки: $-4A + 3Ax + 3B = 5x$.

Сгруппируем слагаемые с одинаковой степенью *x*:

$3Ax - 4A + 3B = 5x$.

Уравняем коэффициенты перед *x* слева и справа:

$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{ \begin{array}{l} 3A = 5 \\ -4A + 3B = 0 \end{array} \right. \\ x^0 & \end{array}$, отсюда найдем $A = \dfrac{5}{3}$ и $B = \dfrac{4A}{3} = \dfrac{4 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \dfrac{20}{9}$.

Подставим эти значения в выражение: $y_{чн} = Ax + B = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{20}{9}$.

Ответ: $y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{5}{3}x + \dfrac{20}{9}$.

Пример 8.

$y'' - 4y' + 4y = 4e^{10x}$

Составим характеристическое уравнение:

$k^2 - 4k + 4 = 0 \;\Rightarrow\; D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 4 = 0$.

Имеем один действительный корень: $k = \dfrac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$. По табл. 1 (строка 2) записываем:

$$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x.$$

Определяем с помощью табл. 2 вид правой части неоднородного уравнения:

$f(x) = 4e^{3x} = a \cdot e^{3x}$ – строка 2.1, где $m = 3$. Так как $m \neq 2$, то $y_{чн} = Ae^{3x}$.

Найдем первую и вторую производные: $y' = y_{чн}{}' = Ae^{3x} \cdot 3$,

$y'' = \left(Ae^{3x} \cdot 3\right)' = 3Ae^{3x} \cdot 3 = 9Ae^{3x}$.

Подставим $y = y_{чн} = Ae^{3x}$, $y' = 3Ae^{3x}$ и $y'' = 9Ae^{3x}$ в исходное уравнение:

$9Ae^{3x} - 4 \cdot 3Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = 4e^{3x}$.

Вынесем общий множитель:

$e^{3x}(9A - 12A + 4A) = 4e^{3x}$, получаем:

$Ae^{3x} = 4e^{3x}$, откуда $A = 4$.

Получаем, что $y_{чн} = 4e^{3x}$.

Ответ: $y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x + 4e^{3x}$.

Таблица 2

Вид частного решения неоднородного уравнения

N	Правая часть $f(x)$	$y_{чн}$		
1	Многочлен n-ой степени $P_n(x)$	Корни характеристического уравнения $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$	Один из корней характеристического уравнения $k = 0$	Два корня характеристического уравнения $k_1 = k_2 = 0$
1.1	Нулевой степени (число) $P_0(x) = a$	$y_{чн} = A$	$y_{чн} = Ax$	$y_{чн} = Ax^2$
1.2	Первой степени (содержит x) $P_1(x)$	$y_{чн} = Ax + B$	$y_{чн} = (Ax + B)x$	$y_{чн} = (Ax + B)x^2$
1.3	Второй степени (содержит x^2) $P_2(x)$	$y_{чн} = Ax^2 + Bx + C$	$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x$	$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x^2$
2	$P_n(x) \cdot e^{mx}$	$m \neq k_1$, $m \neq k_2$	$m = k_1$ или $m = k_2$	$m = k_1 = k_2$
2.1	$a \cdot e^{mx}$	$y_{чн} = Ae^{mx}$	$y_{чн} = Ae^{mx} \cdot x$	$y_{чн} = Ae^{mx} \cdot x^2$
2.2	$P_1(x) \cdot e^{mx}$	$y_{чн} = (Ax + B)e^{mx}$	$y_{чн} = (Ax + B)e^{mx} \cdot x$	$y_{чн} = (Ax + B)e^{mx} \cdot x^2$
2.3	$P_2(x) \cdot e^{mx}$	$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{mx}$	$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{mx} \cdot x$	$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{mx} \cdot x^2$
3	$P \sin nx + Q \cos nx$	$\alpha = 0$ и $\beta \neq n$	$\alpha = 0$ и $\beta = n$	
3.1	$a \sin nx + b \cos nx$	$y_{чн} = A \sin nx + B \cos nx$	$y_{чн} = (A \sin nx + B \cos nx)x$	

Пример 9.

$y'' + 4y = 2\sin 4x - 5\cos 4x$

Составим характеристическое уравнение:

$k^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; k^2 = -4 \;\Rightarrow\; k = \pm 2i$ – корни комплексные.

По табл. 1 (строка 3) запишем:

$k = 0 \pm 2i$, здесь $\alpha = 0$, $\beta = 2$, тогда

$$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) = e^{0x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Определяем с помощью табл. 2 вид правой части неоднородного уравнения:

$f(x) = 2\sin 4x - 5\cos 4x = a\sin nx + b\cos nx$ – строка 3.1, где $n = 4$.

Так как $\beta = 2 \neq 4$, то

$y_{чн} = A\sin 4x + B\cos 4x$.

Найдем первую и вторую производные:

$y' = \left(A\sin 4x + B\cos 4x\right)' = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x$,

$y'' = \left(4A\cos 4x - 4B\sin 4x\right)' = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x$.

Подставим y и y'' в исходное уравнение:

$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x + 4\left(A\sin 4x + B\cos 4x\right) = 2\sin 4x - 5\cos 4x$

Сгруппируем синусы и косинусы:

$\sin 4x\left(-16A + 4A\right) + \cos 4x\left(-16B + 4B\right) = 2\sin 4x - 5\cos 4x$.

Уравняем коэффициенты около синусов и косинусов:

$\begin{array}{l|l} \sin 4x & \left\{\begin{array}{l} -12A = 2 \\ -12B = -5 \end{array}\right. \\ \cos 4x & \end{array}$, откуда $A = -\dfrac{2}{`12} = -\dfrac{1}{6}$, $B = \dfrac{5}{12}$.

Получаем, что

$y_{чн} = -\dfrac{1}{6}\sin 4x + \dfrac{5}{12}\cos 4x$.

Ответ:

$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{1}{6}\sin 4x + \dfrac{5}{12}\cos 4x$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

ЗАДАЧА 1. Найти неопределенные интегралы.

1.1.	а) $\int\left(4x^3+\frac{3}{\sqrt{x}}-6\right)dx$	б) $\int cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$	в) $\int sin\,x\sqrt{cos\,x}dx$)
1.2.	а) $\int\left(5x^2+\frac{2}{x^4}-2\right)dx$	б) $\int e^{5x}dx$	в) $\int\frac{tg^5 x}{cos^2 x}dx$
1.3.	а) $\int\left(4\sqrt[3]{x}-\frac{5}{x^5}+7\right)dx$	б) $\int\frac{1}{(4x+1)}dx$	в) $\int\frac{\sqrt[3]{ctgx}}{sin^2 x}dx$
1.4.	а) $\int\left(3x+\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}-1\right)dx$	б) $\int\frac{1}{cos^2(7x-3)}dx$	в) $\int\frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$
1.5.	а) $\int\left(3\sqrt[5]{x^2}-\frac{4}{x}+2\right)dx$	б) $\int(5x+1)^3dx$	в) $\int xe^{x^2}dx$
1.6.	а) $\int\left(5\sqrt[4]{x^3}-\frac{10}{x^2}+3\right)dx$	б) $\int\sqrt{4x-3}dx$	в) $\int\frac{x}{1+x^2}dx$
1.7.	а) $\int\left(6\sqrt{x}-\frac{7}{x^3}-4\right)dx$	б) $\int\sqrt[3]{(6x-5)^2}dx$	в) $\int\frac{x^2}{\left(x^3+2\right)^4}dx$
1.8.	а) $\int\left(7x^3+\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}-3\right)dx$	б) $\int\frac{1}{(6x-4)^2}dx$	в) $\int x^4 cos\left(3x^5\right)dx$
1.9.	а) $\int\left(8x^4-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-10\right)dx$	б) $\int\frac{1}{\sqrt{(3x+2)}}dx$	в) $\int sin^5 x\,cos\,xdx$
1.10.	а) $\int\left(7\sqrt[5]{x^3}+\frac{10}{x^6}+5\right)dx$	б) $\int\frac{1}{\sqrt[4]{(5x+2)^3}}dx$	в) $\int cos\,x\cdot e^{sin\,x}dx$

ЗАДАЧА 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

2.1.	$y=2$, $y=x^2-x$
2.2.	$y=2x$, $y=3-x^2$
2.3.	$y=4x$, $y=x^2+3$

2.4.	$y = x^2,\ y = 8 - x^2$
2.5.	$y = 4x - x^2, y = x^2$
2.6.	$y = x^2 + 2x,\ y = x + 2$
2.7.	$y = x^2 - 2x,\ y = 2x - x^2$
2.8.	$y = 3x - x^2,\ y = 2x$
2.9.	$y = x,\ y = 4x - x^2$
2.10.	$y = 2 - x^2\ ,\ y = x$

ЗАДАЧА 3. Выполнить действия с комплексными числами.

3.1.	а) $2e^{-15i} + 3e^{70i}$	б) $\dfrac{70e^{100i}}{(1+4i)+(3-2i)}$
3.2.	а) $4e^{-30i} + 6e^{20i}$	б) $\dfrac{40e^{120i}}{(-1+5i)+(3-2i)}$
3.3.	а) $15e^{-125i} + 25e^{-45i}$	б) $\dfrac{(3-4i)+(2+i)}{2e^{50i}}$
3.4.	а) $30e^{45i} + 50e^{-60i}$	б) $\dfrac{(30-4i)+(20+i)}{3e^{60i}}$
3.5.	а) $50e^{50i} + 20e^{-45i}$	б) $\dfrac{(10-4i)+(2-5i)}{5e^{40i}}$
3.6.	а) $4e^{-45i} + 6e^{80i}$	б) $\dfrac{50e^{80i}}{(-4+3i)+(2-5i)}$
3.7.	а) $10e^{65i} + 20e^{-30i}$	б) $\dfrac{60e^{70i}}{(-5+i)+(2-3i)}$
3.8.	а) $15e^{60i} + 30e^{120i}$	б) $\dfrac{(40-10i)+(20-8i)}{4e^{50i}}$
3.9.	а) $40e^{70i} + 30e^{-25i}$	б) $\dfrac{100e^{-120i}}{(1-5i)+(3+2i)}$
3.10.	а) $15e^{-50i} + 30e^{120i}$	б) $\dfrac{(30-9i)+(-20+i)}{3e^{60i}}$

<u>ЗАДАЧА 4.</u> Решить уравнения.

4.1.	а) $z^2+9=0$	б) $z^3+1=0$
4.2.	а) $z^2+6z+13=0$	б) $z^4-16=0$
4.3.	а) $z^2+4=0$	б) $z^3+8=0$
4.4.	а) $z^2+6z+10=0$	б) $z^4-81=0$
4.5.	а) $z^2+16=0$	б) $z^3-8=0$
4.6.	а) $z^2+2z+2=0$	б) $z^3-125=0$
4.7.	а) $z^2+25=0$	б) $z^3+27=0$
4.8.	а) $z^2+2z+17=0$	б) $z^3+125=0$
4.9.	а) $z^2+36=0$	б) $z^3-27=0$
4.10.	а) $z^2+2z+10=0$	б) $z^4-81=0$

<u>ЗАДАЧА 5.</u> Решить дифференциальные уравнения.

5.1.	а) $y'=\dfrac{y\cdot}{ln^4 y\cdot(5x-2)^3}$	б) $y''=cos(2x)$
	в) $y''-25y'=2\,sin\,4x-cos\,4x$	г) $y''+2y'+y=4x^2$
5.2.	а) $y'=\dfrac{x^2\cdot e^{x^3+5}\cdot}{(3y-2)^4}$	б) $y''=sin(5-3x)$
	в) $y''+4y'+4y=40e^{2x}$	г) $y''+5y'-6y=5-3x$
5.3.	а) $y'=\dfrac{sin\,x}{\sqrt{cos\,x}\cdot(2-5y)^2}$	б) $y''=(4x+1)^3$
	в) $y''-6y'+13y=13x$	г) $y''-2y'+y=5e^{2x}$
5.4.	а) $y'=\dfrac{sin^2 y}{ctgy\cdot(4x+2)}$	б) $y''=\dfrac{1}{(2x-3)^4}$
	в) $y''+4y=4\,sin\,x-5\,cos\,x$	г) $y''+6y'+8y=40e^{-2x}$
5.5.	а) $y'=\dfrac{x^2\cdot\sqrt{3y+1}}{\sqrt[4]{x^3+5}}$	б) $y''=\dfrac{2}{\sqrt{3x-1}}$
	в)) $y''-4y'=sin\,2x-5\,cos\,2x$	г) $y''+6y'+9y=3x+6$

5.6.	а) $y' = \dfrac{(y^2+1)\cdot e^{2x}}{\sqrt{arctgy}}$	б) $y'' = 4e^{2x}$
	в) б) $y'' + 5y' + 4y = -36e^{2x}$	г) $y'' + 14y' + 49y = 5 - x^2$
5.7.	а) $y' = \dfrac{x\cdot e^{x^2+5}}{sin(4y-1)}$	б) $y'' = 3x^2 - \dfrac{2}{x^3}$
	в) $y'' + 2y' + 5y = -16e^{-3x}$	г) $y'' + y' - 2y = 8x^2 - 5$
5.8.	а) $y' = \dfrac{\sqrt{1+y^2}\cdot\sqrt{(2x-5)}}{y}$	б) $y'' = e^{3x+1}$
	в) $y'' - 4y' - 5y = 4x - 1$	г) $y'' + 64y = -2\,cos\,x + 5\,sin\,x$
5.9.	а) $y' = \dfrac{x^2\cdot(3y-4)}{\sqrt[5]{x^3+6}}$	б) $y'' = 3x^2 - 4$
	в) б) $y'' - 4y' = 2\,cos\,3x - sin\,3x$	г) $y'' - 4y' + 13y = -4e^{-2x}$
5.10.	а) $y' = \dfrac{x^3\cdot\sqrt{(2y+3)}}{(2x^4+1)}$	б) $y'' = 10x^4 - 4x$
	в) $y'' - 20y' + 100y = e^{-5x}$	г) $y'' - 4y' + 20y = 5x^2 - 4$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Раздел 7. Интегральное исчисление

1. Неопределённый интеграл. Таблица и свойства. Основные методы интегрирования.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных функций.
4. Определённый интеграл, его свойства и вычисление.
5. Геометрический смысл определённого интеграла. Вычисление площади плоской фигуры.
6. Приложения определенного интеграла.
7. Несобственные интегралы.
8. Двойной интеграл. Определение и свойства, вычисление. Геометрические приложения.
9. Приближенные методы интегрирования.

Раздел 8. Комплексный анализ

1. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Действия с комплексными числами. Решение уравнений.
2. Функции комплексного переменного. Дифференцируемость и аналитичность функций комплексной переменной.

Раздел 9. Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения, задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения, уравнения Бернулли.
2. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общее и частное решения, задача Коши. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
4. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Раздел 10. Функциональный анализ

1. Элементы теории множеств. Запись множества, мера плоского множества.
2. Отображение множеств.

3. Метрические пространства