

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**  
**«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»**

Кафедра математики

Составители  
Казунина Г. А.  
Волков В. М.  
Волкова Е. А.  
Прейс Е. В.

## **МАТЕМАТИКА: РЯДЫ**

### **Методические материалы**

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления  
подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника  
в качестве электронного учебного издания  
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты:

Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Чердниченко А. В. – кандидат технических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

**Казунина Галина Алексеевна,  
Волков Владимир Матвеевич,  
Волкова Екатерина Анатольевна,  
Прейс Елена Валерьевна**

**Математика: ряды:** методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направлений бакалавриата и всех специальностей всех форм обучения / сост. Г. А. Казунина, В. М. Волков, Е. А. Волкова, Е. А. Прейс; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», «Ряды».

Назначение издания – помочь студентам в получении знаний по разделу «Математика: ряды» и в организации самостоятельной работы.

© КузГТУ, 2018  
© Казунина Г. А.,  
Волков В. М.,  
Волкова Е. А.,  
Прейс Е. В.,  
составление, 2018

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математика: ряды».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

# Практические занятия и самостоятельная работа студентов

## Тема 10. Ряды

### 1. Числовые ряды, необходимое условие сходимости. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница

#### Практическое занятие

1. Запишите простейшие формулы  $n$ -го члена ряда:

а)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

б)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

в)  $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$

г)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

д)  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

ж)  $\frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{13} + \dots$

з)  $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

2. Запишите первые четыре члена ряда по известному общему члену  $a_n$ :

а)  $a_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$ ; б)  $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2}$ ; в)  $a_n = \frac{n}{10^n+n}$ ; г)  $a_n = \frac{(2+\sin \frac{n\pi}{2}) \cos n\pi}{n!}$ .

3. Пользуясь определением, исследовать ряд на сходимость и найти его сумму:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ ;

г)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-1)}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ ; е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-3^n}{12^n}$ ; ж)  $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2-7n+10}$

.

4. Проверить, выполняется ли для данного ряда необходимый признак сходимости:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{5n+9}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^4}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ ;

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin \frac{1}{n}$ ; е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n} + 2\right)$ ; ж)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+2}{n^2+7}$ .

5. Пользуясь признаком сравнения исследовать ряды на сходимость:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-1}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n-3)^3}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5}}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n^2+4)^4}}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(6n-5)}$ ;

е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+3}{n^3+1}$ ; ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ ; з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)5^n}$ ; и)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{5^n}$ ; л)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

6. Исследовать ряды на сходимость, используя достаточные признаки сходимости:

6.1. Признак Д'Аламбера

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^5}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)} \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{\frac{n}{2}}} \quad \text{д)}$$

$$\text{*) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n};$$

6.2. Признак Коши

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{5n+1} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^3+1}{4n^3-2} \right)^n;$$

6.3. Интегральный признак Коши

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

7. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.

7.1. Исследовать знакопередающиеся ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{2n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n \sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+2}{n(n+2)}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{3n-1}{5n+2} \right)^n$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{3^n}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

7.2. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$  с точностью  $\alpha = 0,01$ .

### Самостоятельная работа

1. Пользуясь определением исследовать ряд на сходимость и найти его сумму:

$$1.1\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 7^n}{35^n};$$

$$1.1\text{б) } \sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2 - 5n + 4};$$

$$1.2\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n};$$

$$1.2.6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)};$$

$$1.3\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{21^n};$$

$$1.3\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)};$$

$$1.4\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{42^n};$$

$$1.4\text{б) } \sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 12n + 35};$$

$$\begin{array}{ll}
1.5a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+7^n}{14^n}; & 1.5b \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n^2-12n+35}; \\
1.6a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-5^n}{15^n}; & 1.6b \sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2-13n+40}; \\
1.7a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n-2^n}{10^n}; & 1.7b \sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2-11n+28}; \\
1.8a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n-2^n}{14^n}; & 1.8b \sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2-9n+18}; \\
1.9a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+4^n}{20^n}; & 1.9b \sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2-7n+10}; \\
1.10a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5^n}{10^n}; & 1.10b \sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2-6n+8}; \\
1.11a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+7^n}{35^n}; & 1.11b \sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}; \\
1.12a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n-6^n}{30^n}; & 1.12b \sum_{n=7}^{\infty} \frac{72}{n^2-9n+18}; \\
1.13a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+6^n}{30^n}; & 1.13b \sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2-14n+48}; \\
1.14a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+8^n}{16^n}; & 1.14b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2+4n+3}; \\
1.15a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n+8^n}{56^n}; & 1.15b \sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2-5n+4}; \\
1.16a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3 \cdot 5^n}{10^n}; & 1.16b \sum_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2+n-2}; \\
1.17a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n-4^n}{12^n}; & 1.17b \sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}; \\
1.18a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n+5^n}{30^n}; & 1.18b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2+6n+8}; \\
1.19a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^n+4^n}{10^n}; & 1.19b \sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2-4n+3}; \\
1.20a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-4^n}{8^n}; & 1.20b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2+4n+3}.
\end{array}$$

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\begin{array}{ll}
2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4n}{n^3+5}; & 2.2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \\
2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(4n+3)3^n}; & 2.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}; \\
2.5 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp(-n^3); & 2.6 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2+2}{n^2+4} \right); \\
2.7 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}; & 2.8 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2+5n+8}{3n^2-2} \right)^n; \\
2.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}; & 2.10 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^7 n};
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n \cdot (n+1)!}; & \quad 2.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+1))^n}; \\
2.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}; & \quad 2.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n^3-n+4}; \\
2.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-2)}{3^n \cdot n!}; & \quad 2.16 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^{2n}; \\
2.17 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n(n-1)}}; & \quad 2.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 2^n}{(n-1)!}; \\
2.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}; & \quad 2.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3)}; \\
2.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}; & \quad 2.22 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{4n^2}\right)^{3n}; \\
2.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (n+3)}; & \quad 2.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2-1}; \\
2.25 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}; & \quad 2.26 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{3^n}\right)^n; \\
2.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \cdot 3^n; & \quad 2.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}; \\
2.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}; & \quad 2.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{3^n \cdot (2n+3)!}; \\
2.31 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}; & \quad 2.32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n) \cdot \ln^3(3+8n)}; \\
2.33 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}; & \quad 2.34 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}; \\
2.35 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tg \frac{\pi}{2n+1}\right)^n; & \quad 2.36 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2\pi}{3^n}; \\
2.37 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}}; & \quad 2.38 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n}\right)^n; \\
2.39 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}; & \quad 2.40 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n}; \\
2.41 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n) \ln^5(3+2n)}; & \quad 2.42 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}; \\
2.43 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2(n+3)}}; & \quad 2.44 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4) \ln^2(9n-4)}; \\
2.45 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}; & \quad 2.46 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}; \\
2.47 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n & \quad 2.48 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n}\right)^{2n} \\
2.49 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3)!}; & \quad 2.50 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{5^n}; \\
2.51 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+2)!}{n^n}; & \quad 2.52 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.53 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln(n+5)}; & \quad 2.54 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}; \\
2.55 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)} & \quad 2.56 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1}\right)^{2n}; \\
2.57 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1}\right)^n; & \quad 2.58 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5}\right)^n; \\
2.59 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}; & \quad 2.60 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{7n^2+n}\right)^n.
\end{aligned}$$

3. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

$$\begin{aligned}
3.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n^4}; & \quad 3.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \\
3.3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}; & \quad 3.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}; \\
3.5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}; & \quad 3.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}; \\
3.7 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{(n-1) \cdot 6^n}; & \quad 3.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}; \\
3.9 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}; & \quad 3.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}; \\
3.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}; & \quad 3.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}; \\
3.13 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}; & \quad 3.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{5^n}; \\
3.15 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}; & \quad 3.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}; \\
3.17 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n}}; & \quad 3.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}; \\
3.19 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}; & \quad 3.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \cdot n}; \\
3.21 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}; & \quad 3.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}; \\
3.23 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(n+1) \cdot n}; & \quad 3.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}; \\
3.25 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}; & \quad 3.26 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \\
3.27 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{9n-1}; & \quad 3.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)}{n^3+1}; \\
3.29 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}; & \quad 3.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.
\end{aligned}$$



## 2. Степенные ряды, область сходимости.

### Практическое занятие

1. Исследовать на сходимость степенные ряды:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+1)}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}.$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}, \left( n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right); \quad ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^{n+1} (-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}; \quad к) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{2^n}.$$

2. Указать область сходимости степенного ряда и найти его сумму

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}; \quad б) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{x}{3}\right)^n + \left(\frac{x}{5}\right)^n \right\}; \quad в) \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

### Самостоятельная работа

1. Найти область сходимости степенного ряда и его сумму

$$1.1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 5 \left(\frac{x}{2}\right)^n - \left(\frac{x}{6}\right)^n \right\}; \quad 1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^n} - \frac{1}{3^n} \right) (x-3)^n;$$

$$1.3 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(x-3)^n}{4^n} + \frac{(x-2)^n}{3^n} \right); \quad 1.4 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) (x-4)^n;$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right) x^n; \quad 1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5^n} - \frac{1}{3^n} \right) (x+2)^n;$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x-1)^n}{3^n}; \quad 1.8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{4^n};$$

$$1.9 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right) (x+3)^n; \quad 1.10 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 2 + \frac{1}{4^n} \right) (x-3)^n;$$

$$1.11 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4}{5^n} - 1 \right) x^n; \quad 1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} (x-5)^n;$$

$$1.13 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{5^n} + \frac{1}{4^n} \right) (x-5)^n; \quad 1.14 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{3}{2^n} \right) (x-4)^n;$$

1.15  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n}\right) (x+3)^n;$

1.16  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx};$

1.17  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n;$

1.18  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{3^n} - 1\right) x^n;$

1.19  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{3^n}\right) (x-2)^n;$  1.20  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n};$  1.21  $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n .$

2. Найти область сходимости степенного ряда

2.1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-4)^n}{3^n};$  2.2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^2+1};$  2.3  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n};$

2.4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (x+2)^n}{n^3+1};$  2.5  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-5)^n}{n(n+1)};$  2.6  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n};$

2.7  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{(3n-2)^{2n} \cdot 3^n};$  2.8  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot x^n}{2^n};$  2.9  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2};$

2.10  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+1) \cdot n};$  2.11  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x+5)^n}{n \cdot 5^n};$  2.12  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{n}{2};$

2.13  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot 5^n};$  2.14  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1};$  2.15  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)};$

2.16  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$  2.17  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+3)^n;$  2.18  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(n^2+1) \cdot 8^n};$

2.19  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{n^n};$  2.20  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{2n-1};$  2.21  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-2)^{2n}}{2n};$

2.22  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{\sqrt{n}};$  2.23  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n};$  2.24  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cdot n!}{5^n};$

2.25  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n};$  2.26  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!};$  2.27  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot x^n;$

2.28  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n};$  2.29  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n^2+1)};$  2.30  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^{n+1}}.$

### 3. Ряд Тейлора. Примеры разложения функций в ряд Тейлора.

#### Практическое занятие

#### Справочные материалы

#### Ряды Маклорена основных элементарных функций и некоторые другие разложения в ряды

1. Бином с произвольным показателем

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!} z^4 \dots$$

2. Стандартная экспонента и натуральный логарифм

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 \dots; \quad \ln(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 \dots$$

3. Тригонометрические, обратные тригонометрические и гиперболические функции

$$\sin(z) = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 \dots;$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 \dots;$$

$$\operatorname{sh}(z) = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \frac{1}{7!} z^7 \dots;$$

$$\operatorname{ch}(z) = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \frac{1}{6!} z^6 \dots;$$

$$\operatorname{tg}(z) = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 \dots;$$

$$\operatorname{th}(z) = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 \dots;$$

$$\arcsin(z) = z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{40} z^5 \dots;$$

$$\operatorname{arctg}(z) = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \dots$$

Разложение арктангенса при больших значениях переменной

$$\operatorname{arctg}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + O(x^{-5}); \quad \operatorname{arctg}(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + O(x^{-5})$$

1. Пользуясь определением разложения функции в ряд Маклорена, получите разложения в ряд Маклорена для основных элементарных функций (проанализируйте приведенную выше таблицу);

2. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена разложить функцию в ряд с заданной точностью  $o(x^n)$ . Для бесконечно малых указать степенной порядок малости:

2.1.  $e^{7x^2}; o(x^8)$  ;

2.2.  $\sin \frac{2x^4}{3}; o(x^{12})$

2.3.  $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}}; o(x^6)$

2.4.  $2^x; o(x^4)$

2.5.  $\exp(-2x+1); o(x^4)$

2.6.  $2x - \operatorname{arctg} 2x; o(x^7)$

2.7.  $\ln(12-x-x^2); o(x^5)$

2.8.  $\sqrt[4]{16+x^9} - 2; o(x^{11})$

$$2.9. \cos x - \sqrt{1-x^2}; \quad o(x^6) \quad 2.10. 1 - e^{x^2} + x \sin x; \quad o(x^7)$$

3. Разложить функцию по формуле Тейлора вблизи указанной точки  $a$  с требуемой точностью  $o((x-a)^n)$ :

$$3.1 \frac{1}{3x+1}, \quad a = -2; \quad o((x+2)^4);$$

$$3.2 \frac{1}{x} a = 2; \quad o((x-2)^4);$$

$$3.3 \ln x, \quad a = 1, \quad o((x-1)^4);$$

$$3.4 (x+2) \ln(2x^2 + 8x + 11), \quad a = -2, \quad o((x+2)^5).$$

4. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена выполнить приближенные вычисления:

а) Вычислить  $\sqrt[3]{70}$  с точностью до 0,001

б) Вычислить  $\sin 9^\circ$  с точностью до 0,0001

в) Вычислить  $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$  с точностью до 0,0001

г) Вычислить  $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$  с точностью до 0,001

д) Вычислить  $\int_0^{0,5} \frac{\cos x^2}{4} dx$  с точностью до 0,001

5. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена получить приближенные формулы, описывающие поведение функции при больших значениях аргумента (асимптоты графиков функций на бесконечности):

$$5.1 \quad y = \sqrt[3]{x^2 - x^3};$$

$$5.2 \quad y = 1 + xe^{\frac{2}{x}};$$

$$5.3 \quad y = x^4 \arcsin(1/x^3);$$

$$5.4 \quad y = x + \sqrt{x^2 - 4x}.$$

6. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена, раскрыть неопределенности:

$$6.1. \frac{\sin(x) - \operatorname{tg}(x)}{x^3}, \quad x \rightarrow 0; \quad 6.2. \frac{\operatorname{arctg}(x) - \arcsin(x)}{x - \sin(x)}, \quad x \rightarrow 0$$

$$6.3. \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4}, \quad 6.4. \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty$$

7. Получить разложение в степенной ряд решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения)

$$\text{a) } y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0;$$

$$\text{б) } y' = x^2 y^2 + 1, \quad y(0) = 1$$

### Самостоятельная работа

1. Разложить функцию в ряд Маклорена с указанной точностью:

$$1.1. f(x) = \operatorname{sh} x \quad o(x^7); 1.2. f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}} \quad o(x^6);$$

$$1.3. f(x) = \operatorname{ch}(2x^3) \quad o(x^{12});$$

$$1.4. f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad o(x^{16});$$

$$1.5. f(x) = e^{3x} \quad o(x^6);$$

$$1.6. f(x) = \cos \frac{2x^3}{3} \quad o(x^{12});$$

$$1.7. f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad o(x^6);$$

$$1.8. f(x) = \sin x^2 \quad o(x^8);$$

$$1.9. f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} \quad o(x^{12});$$

$$1.10. f(x) = \cos 5x \quad o(x^8);$$

$$1.11. f(x) = 5^x \quad o(x^7);$$

$$1.12. f(x) = x \cdot \cos \sqrt{x} \quad o(x^6);$$

$$1.13. f(x) = \cos^2 x \quad o(x^6);$$

$$1.14. f(x) = e^{-x^2} \quad o(x^6);$$

$$1.15. f(x) = \frac{\sin 5x}{x} \quad o(x^6);$$

$$1.16. f(x) = x \cdot e^{5x} \quad o(x^6);$$

$$1.17. f(x) = \sin \frac{2x^3}{3} \quad o(x^9);$$

$$1.18. f(x) = \cos x \quad o(x^6);$$

$$1.19. f(x) = x \cdot \sin 3x \quad o(x^7);$$

$$1.20. f(x) = 2x - \sin 2x \quad o(x^7)$$

$$1.21. f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x - 2 \quad o(x^8);$$

$$1.22. f(x) = \exp(-2x + 1) \quad o(x^4);$$

$$1.23. f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x \quad o(x^7);$$

$$1.24. f(x) = \sqrt[3]{8 + x^9} - 2 \quad o(x^{11});$$

$$1.25. f(x) = \ln((x + 1)(x + 4)) \quad o(x^5);$$

$$1.26. f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \quad o(x^4);$$

$$1.27. f(x) = \sqrt[4]{16 + x^6} - 2 \quad o(x^{24});$$

$$1.28. f(x) = \ln((x+3)(x+1)) \quad o(x^5);$$

$$1.29. f(x) = \operatorname{sh}2x - \sin2x \quad o(x^7);$$

$$1.30. f(x) = \operatorname{arctg}2x - \sin2x \quad o(x^7).$$

2. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности указанной точки  $x = a$  с заданной точностью

$$2.1. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad a = 2 \quad o((x-2)^4);$$

$$2.2. f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}} \quad a = -3 \quad o((x+3)^4);$$

$$2.3. f(x) = \ln(5x+3) \quad a = \frac{-2}{5} \quad o\left(\left(x + \frac{2}{5}\right)^4\right);$$

$$2.4. f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \quad a = 1 \quad o((x-1)^4);$$

$$2.5. f(x) = \frac{1}{2x+5} \quad a = 3 \quad o((x-3)^4);$$

$$2.6. f(x) = e^x \quad a = 1 \quad o((x-1)^4);$$

$$2.7. f(x) = \frac{1}{x+3} \quad a = -2 \quad o((x+2)^5);$$

$$2.8. f(x) = \frac{1}{x} \quad a = -2 \quad o((x+2)^5);$$

$$2.9. f(x) = e^x \quad a = 2 \quad o((x-2)^5);$$

$$2.10. f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x+3}} \quad a = 1 \quad o((x-1)^4).$$

3. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена

а) раскрыть неопределенности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}x\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

б) Сравните скорости убывания бесконечно малых функций при условии  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) = 2x - \operatorname{tg}2x,$$

$$g(x) = \cos x + chx - 2$$

$$p(x) = x^2 \cdot \exp x - \cos x + 1$$

$$q(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

$$m(x) = \operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arcsin} 2x$$

4. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена

а) получить приближенные формулы, описывающие поведение функции при больших значениях аргумента  $\rightarrow \infty$  (асимптоты графиков функций на бесконечности):

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 16x^3}; \quad f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3};$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}; \quad f(x) = \frac{x^2 + 8}{\sqrt{x^2 - 4}};$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x}}; \quad f(x) = x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

б) Раскрыть неопределенности:

$$x\left(1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right); \quad x \rightarrow \infty \quad \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}; \quad x \rightarrow \infty$$

5. Используя таблицу разложений функций в ряд Маклорена выполнить приближенные вычисления с указанной точностью  $\alpha$ :

5.1.  $\sqrt{1,3}$   $\alpha = 0,001$ ;

5.2.  $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^x}{x} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

5.3.  $\sqrt[5]{250}$   $\alpha = 0,001$ ;

5.4.  $\int_0^{0,4} \sqrt{1 - x^3} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

5.5.  $\sin \frac{\pi}{10}$   $\alpha = 0,001$ ;

5.6.  $\int_0^{0,5} \frac{x - \sin x}{x^2} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

5.7.  $\ln 1,3$   $\alpha = 0,001$ ;

5.8.  $\int_0^{0,4} \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx$ ,  $\alpha = 0,01$ .

5.9.  $\ln 1,1$   $\alpha = 0,0001$ ;

5.10.  $\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

5.11.  $\operatorname{ch} 2$ ,  $\alpha = 0,0001$ ;

5.12.  $\int_0^{0,25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

5.13.  $\sqrt[3]{8,36}$ ,  $\alpha = 0,001$ ;

5.14.  $\int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

- 5.15.  $\sqrt[3]{8,36}$   $\alpha = 0,0001$ ;      5.16.  $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.17.  $\ln 1,2$   $\alpha = 0,0001$ ;      5.18.  $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.19.  $\sqrt{e}$ ,  $\alpha = 0,0001$ ;      5.20.  $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.21.  $\ln 1,5$   $\alpha = 0,001$ ;      5.22.  $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.23.  $\sqrt[6]{738}$   $\alpha = 0,001$ ;      5.24.  $\int_0^{0,5} \ln(1+x^2) dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.25.  $\sin 1^\circ$ ,  $\alpha = 0,0001$ ;      5.26.  $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.27.  $\sqrt{1,3}$   $\alpha = 0,001$ ;      5.28.  $\int_0^1 \cos \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .  
 5.29.  $\cos 10^\circ$ ,  $\alpha = 0,0001$ ;      5.30.  $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$ ,  $\alpha = 0,001$ .

6. Получить разложение в степенной ряд решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения)

- 6.1.  $y' = x^2 + y$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.2.  $y' = x^2 - y^2$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ;  
 6.3.  $y' = x^2 y^2 + 1$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.4.  $y' = x^3 + y^2$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ;  
 6.5.  $y' = x + y^2$ ,  $y(0) = -1$ ;  
 6.6.  $y' = x + x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.7.  $y' = 2 \cos x - xy^2$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.8.  $y' = e^x y^2$ ,  $y(0) = 0$ ;  
 6.9.  $y' = x + y + y^2$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.10.  $y' = 2y^2 + ye^x$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ ;  
 6.11.  $y' = x^2 y^2 + y \sin x$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ;  
 6.12.  $y' = 2xy^2 + e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.13.  $y' = x + e^y$ ,  $y(0) = 0$ ;  
 6.14.  $y' = y \cos x + 2 \cos y$ ,  $y(0) = 0$ ;  
 6.15.  $y' = x^2 + 2y^2$ ,  $y(0) = 0,2$ ;  
 6.16.  $y' = x^2 + xy + y^2$ ,  $y(0) = 0,5$ ;  
 6.17.  $y' = x + e^{\sin x}$ ,  $y(0) = 0$ ;  
 6.18.  $y' = 2x + y^2 + e^x$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.19.  $y' = x \sin x - y^2$ ,  $y(0) = 1$ ;  
 6.20.  $y' = xy + 2x^2$ ,  $y(0) = 0$ ;  
 6.21.  $y' = x - 2y^2$ ,  $y(0) = 0,5$ ;



6.22.  $y' = 2y^2 + xe^x, y(0) = 0;$

6.23.  $y' = xy + x^2 + y^2, y(0) = 1;$

6.24.  $y' = xy + e^x, y(0) = 0;$

6.25.  $y' = ye^x, y(0) = 1;$

6.26.  $y' = xy + 2 \sin x, y(0) = 0;$

6.27.  $y' = ye^x, y(0) = 1;$

6.28.  $y' = xy + e^y, y(0) = 0;$

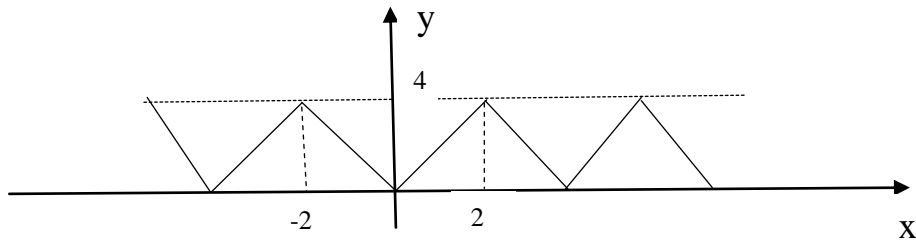
6.29.  $y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2};$

6.30.  $y' = x^2y^2 + 1, y(0) = 1.$

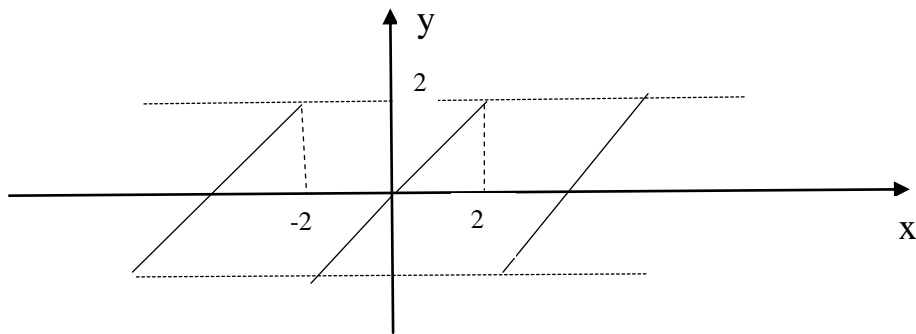
#### 4. Ряд Фурье. Примеры разложения функций в ряд Фурье

1. Разложить указанную периодическую функцию в ряд Фурье.

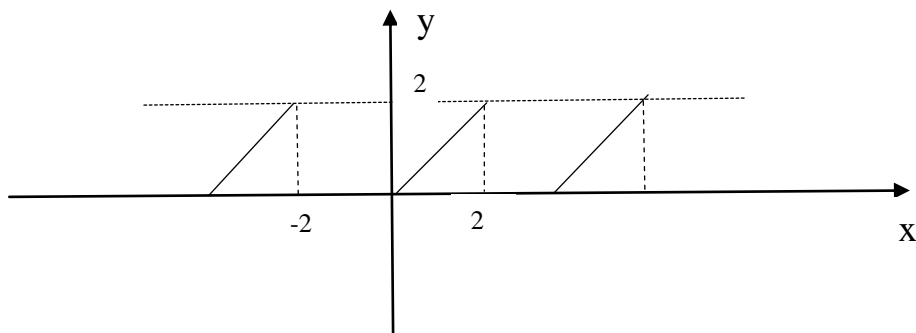
Схематично построить спектр. Найти среднее значение функции на периоде.



4.1.



4.2.



4.3.

4.4. Найти коэффициент  $a_k$  разложения функции  $y = x^3$  в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \text{ заданной на интервале } (-\pi, \pi);$$

4.5. Найти коэффициент  $b_k$  разложения функции  $y = x^2$  в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \text{ заданной на интервале } (-\pi, \pi);$$

4.6. Нечетная функция задана на интервале  $(-1, 1)$  и периодически продолжена. Тогда коэффициент  $a_0$  разложения функции в ряд Фурье равен

4.7. Функция, имеющая на интервале  $(-1, 1)$  наибольшее значение  $M = 4$  и наименьшее  $M = 0$  значение периодически продолжена. Тогда коэффициент  $a_0$  разложения функции в ряд Фурье равен

### Самостоятельная работа

1. Разложить указанную периодическую функцию, заданную на периоде, в ряд Фурье. Схематично построить спектр. Найти среднее значение функции на периоде.

$$1.1. f(x) = \begin{cases} 7x - 1, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 3 - 8x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.3. f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.4. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ \frac{x}{5} - 2, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.5. f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.6. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 10x - 3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$1.7. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 3, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.8. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 4 - 9x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.9. f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & -\pi \leq x \leq 0; \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.10. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.11. f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.12. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 2x - 1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.13. f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad 1.14. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ x - 1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.15. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 4 - 2x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}; \quad 1.16. f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -\pi \leq x \leq 0; \\ x - 1, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$1.17. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1 - 4x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.18. f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.19. f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.20. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.21. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi - x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.22. f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.23. f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.24. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 3x - 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.25. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.26. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 3 - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.27. f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.28. f(x) = \begin{cases} x - 2, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.29. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 4x - 3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$1.30. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Студенты обязаны в объеме часов, отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины, выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

*К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.*

**Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения раздела «Математика: ряды»:**

*Основная литература*

1. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 688 с. <http://e.lanbook.com/book/281>

2. Математический анализ [Текст]: учебное пособие для студентов технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика» и «Математический анализ» / В. А. Гоголин, И. А. Ермакова; ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. математики. – Кемерово, 2016. – 114 с. <http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=91479&type=utchposob:common>

3. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2010. – 479 с.

*Дополнительная литература*

4. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва: ОНИКС, 2007. – 304 с.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 2: учебное пособие / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС 21 век, 2005. – 304 с.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. [Текст] Ч. 2: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС 21 век, 2003. – 304 с.