МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители

А. В. Дягилева
И. С. Кузнецов

МАТЕМАТИКА: ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии в качестве электронного учебного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты

Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Ермакова И. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Дягилева Анна Владимировна
Кузнецов Игорь Сергеевич
Математика: функции нескольких переменных: [Электронный ресурс] методические материалы для обучающихся технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», «Математический анализ» всех форм обучения / сост. А. В. Дягилева, И. С. Кузнецов; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», «Математический анализ».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по разделу интегральное исчисление и организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математика: функции нескольких переменных».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Функции нескольких переменных

1. Понятие функции двух переменных, область определения.

2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1. Понятие функции двух переменных, область определения.

Область определения функции. Пусть каждой точке *P (x, y)* из области D, составится в соответствие некоторое число *z E,* тогда *z* = *z* (*x*, *y*) называется функцией двух переменных, где *x*, *y* – независимые аргументы, D – область определения функции, *E* – множество значений.

Геометрическая, область определения функции D представляет собой часть плоскости, над которой лежит некоторая поверхность, состоящая из точек *M (x, y, z)*, координаты которых удовлетворяют уравнения уравнению *z* = *z (x, y)*.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

Данная функция определена в тех точках плоскости *XOY*, в которых $y - x^2 + 2x > 0$ или $y > x^2 - 2x$. Точки плоскости, для которых $y = x^2 - 2x$, образуют границу области D. Уравнение $y = x^2 - 2x$ задает параболу (рис.1). Сами точки параболы не принадлежат области D, поэтому они изображены штриховой линией. Далее проверяем, что все точки, лежащие внутри параболы, удовлетворяют неравенству $y > x^2 - 2x$. Следовательно, все точки плоскости, лежащие внутри параболы, образуют область определения функции.

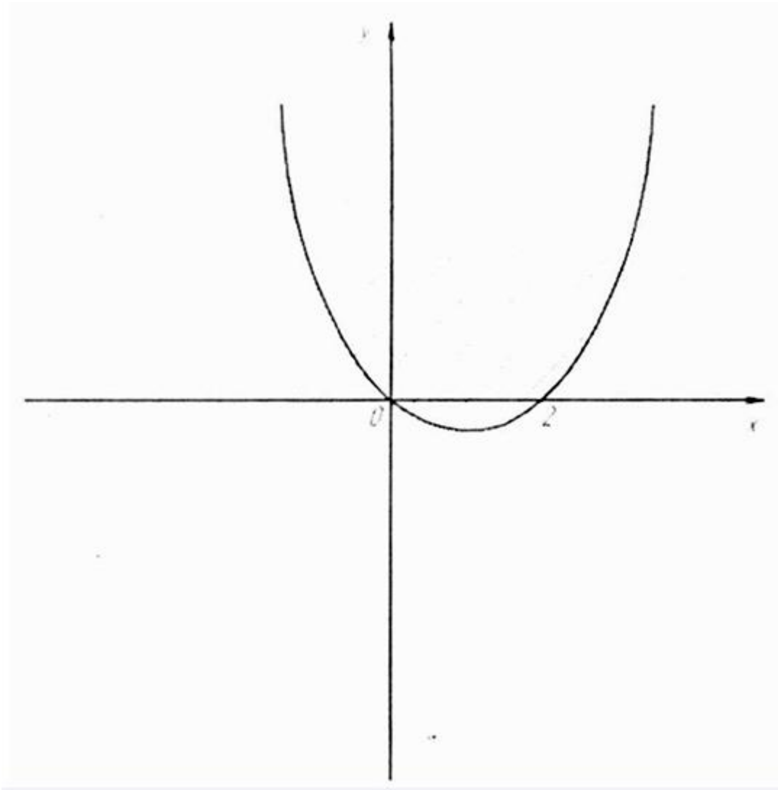

Рисунок 1

Пример 2. Найти область определения функции $z = \arcsin(x - 3y)$.

Данная функция определена в точках *XOY*, в которых $-1 \le x - 3y \le 1$. Или $\begin{cases} x - 3y \ge -1 \\ x - 3y \le 1 \end{cases} \to y \le \dfrac{x+1}{3}$ и $y \ge \dfrac{x-1}{3}$. Прямые линии $y = \dfrac{x+1}{3}$, $y = \dfrac{x-1}{3}$ образуют границу в области D (рис. 2). Множество точек, лежащих между этими границами, удовлетворяют системе неравенств и являются областью определения функции *z*.

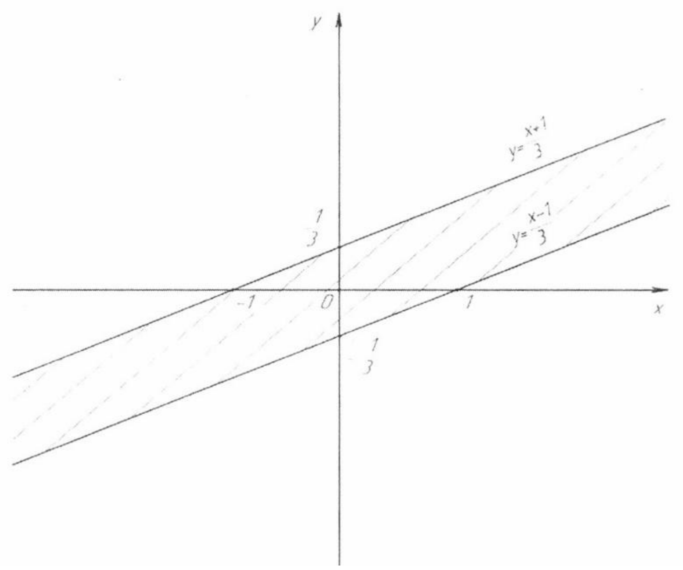

Рисунок 2

2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Частные производные. Частной производной от функции $z = z(x,y)$ по независимой переменной x называется производная, вычисленная при постоянном значении y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}$$

Частной производной по переменной y называется производная, вычисленная при постоянном значении x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y' = lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}$$

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полным приращением функции z = $z(x, y)$ в точке $P(x, y)$ называется

$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y),$

где Δx и Δy произвольные приращения аргументов.

Функция называется дифференцируемой, если её полное приращение можно представить в виде: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y$ + б. м. ($\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$).

Полным дифференциалом функции z = z(x, y) называется главная линейная часть полного приращения функции, т. е. $dz = A\Delta x + B\Delta y$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда полный дифференциал вычисляется по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Если Δx, Δy, $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ являются малыми величинами, то $\Delta z \approx dz$,и справедливо равенство:

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + dz$$

Частными производными второго порядка от функции $z = z\,(x, y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = z''_{\chi\chi} = (z'_\chi)'_\chi$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) z''_{xy} = (z'_\chi)'_y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = z''_{yy} = (z'_y)'_y$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = z''_{yx} = (z'_y)'_\chi$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвёртого и т. д. порядков:

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})) = z''_{xxy} = ((z'_\chi)'_\chi)'_y$

Пример 3. Найти частные производные первого порядка для функции $z = ln(xy - 4x^2 + y^2)$.

Найдем частные производные функции z, используя формулы дифференцирования функции одной переменной $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$ и правила дифференцирования:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(xy - 4x^2 + y^2)'}{xy - 4x^2 + y^2} = \frac{y - 8x}{xy - 4x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(xy - 4x^2 + y^2)'}{xy - 4x^2 + y^2} = \frac{x + 2y}{xy - 4x^2 + y^2}$

Пример 4. Найти частные производные первого порядка для функции $z = arctg\sqrt{x^3 + 2y}$. Воспользуемся формулами дифференцирования $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u'$, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$ и найдем частные производные:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\sqrt{x^3+2y})^2} \cdot (\sqrt{x^3 + 2y})'_x = \frac{1}{1+x^3+2y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+2y}} \cdot (x^3 + 2y)'_x = \frac{1}{1+x^3+2y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+2y}} \cdot 3x^2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\sqrt{x^3+2y})^2} \cdot (\sqrt{x^3 + 2y})'_y = \frac{1}{1+x^3+2y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+2y}} \cdot (x^3 + 2y)'_y = \frac{1}{1+x^3+2y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+2y}} \cdot 2.$

Пример 5. Найти частные производные первого порядка для функции $u = zy \cdot cos(xy + 3z)$ в точке $M_o(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12})$.

При отыскании частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, постоянными будут переменные z, y, следовательно, они могут быть вынесены за знак производной:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = zy \cdot (-\sin(xy + 3z)) \cdot (xy + 3z)'_x = -zy^2 \cdot \sin(xy + 3z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial_x}(1; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12}) = -\frac{\pi}{12} \cdot (\frac{\pi}{2})^2 \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12}) = -\frac{\pi^3}{48} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi^3\sqrt{2}}{96} \approx -0{,}456;$$

При отыскании частных производных $\frac{\partial u}{y}$ и $\frac{\partial u}{z}$ необходимо применить правило дифференцирования произведения:

$\frac{\partial u}{\partial y} = (zy)'_y \cos(xy+3z) + zy(\cos(xy+3z))'_y = z\cos(xy+3z) -$
$zy \sin(xy +$
$3z)(xy+3z)'_y = z \cdot \cos(xy+3z) - xyz \sin(xy+3z);$

$\frac{\partial u}{\partial y}(1; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{12} \cos(\frac{3\pi}{4}) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{12} \sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{24} - \frac{(\pi)^2\sqrt{2}}{48} \approx -0{,}476;$

$\frac{\partial u}{\partial z} = (zy)'_Z \cos(xy+3z) + zy(\cos(xy+3z))'_Z) =$
$= y\cos(xy+3z) - zy\sin(xy+3z)(xy+3z)'_Z = y\cos(xy+3z) -$
$3zy \sin(xy+3z)$;

$\frac{\partial u}{\partial z}(1; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) - 3\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{12} \sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \approx -1{,}982$

Пример 6. Найти полный дифференциал для функции
$z = 3xy^3 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Воспользуемся формулой полного дифференциала: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = (3xy^3)'_x - ((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}})'_x = 3y^3 - (-\frac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2+y^2)'_\chi =$
$= 3y^3 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\,x = 3y^3 + \frac{\chi}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$

$\frac{\partial z}{\partial y} = (3xy^3)'_y - ((x^2+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}})'_y = 9xy^2 - (-\frac{1}{2})(x^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2+y^2)'_y =$
$= 9xy^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = 9xy^2 + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};$

Полный дифференциал функции z равен:
$dz = (3y^3 + \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}})dx + (9xy^2 + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}})dy.$

Пример 7. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = tg(3x+4y)$.

Чтобы найти вторые частные производные от функции Z, воспользуемся формулами: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = (tg(3x+4y))'_x = \frac{1}{cos^2(3x+4y)} \cdot (3x+4y)'_X = \frac{3}{cos^2(3x+4y)};$

$\frac{\partial z}{\partial y} = (tg(3x+4y))'_y = \frac{1}{cos^2(3x+4y)} \cdot (3x+4y)'_y = \frac{4}{cos^2(3x+4y)};$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (\frac{3}{cos^2(3x+4y)})'_y = 3\big(\cos^{-2}(3x+4y)\big)'_y = 3(-2)cos^{-3}(3x+4y)$
$(\cos(3x+4y))'_y = = (-6)cos^{-3}(3x+4y) \cdot (-\sin(3x+4y)) \cdot (3x +$
$+4\gamma)'_y = 24cos^{-3}(3x+4y) \cdot \sin(3x+4y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (\frac{4}{cos^2(3x+4y)})'_x = 4(cos^{-2}(3x+4y))'_\chi = 4(-2)cos^{-3}(3x+4y)$
$\cdot (\cos(3x+4y))'_x =$
$= (-8)cos^{-3}(3x+4y)(-sin(3x+4y) \cdot (3x+4y)'_\chi = 24cos^{-3}(3x+4y) \times$
$\times sin(3x+4y)$.

Пример 8. Проверить, удовлетворяет ли данному уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ функция $u = e^{\frac{x}{y}}$.

Найдем частные производные, входящие в это уравнение, и подставим их:

$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{\frac{x}{y}})'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot (\frac{x}{y})'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot (\frac{1}{y})$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = |e^{\frac{x}{y}})'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot (\frac{x}{y})'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2})$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (\frac{\partial u}{\partial x})'_y = (e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y})'_y = (e^{\frac{x}{y}})'_y \cdot \frac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}} \cdot (\frac{1}{y})'_y = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^3} - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$;

Подставляя полученные производные в уравнение, получим $e^{\frac{x}{y}} \cdot (\frac{1}{y}) - e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) + y(-e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^3} - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}) = e^{\frac{x}{y}}(\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}) = 0$;

Следовательно, функция удовлетворяет уравнению.

Экстремум функции двух переменных. Для определения точек экстремума функции двух переменных *z = (x, y),* найдем критические точки. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x(x_o;\ y_0) = 0 \\ z_y(x_o;\ y_0) = 0 \end{cases}$$

Чтобы критическая точка M_o $(x_o;\ y_o)$ являлась точкой экстремума, необходимо выполнение достаточного условия существования точек экстремума. Пусть

$\Delta = z''_{xx}(x_o, y_o) \cdot z''_{yy}(x_{0}, y_0) - (z''_{xy}(x_o, y_o))^2$

При этом: 1) если $\Delta > 0$, то M_o есть точка экстремума: при $z''_{xx}(M_o) < 0$ точка максимума, при $z''_{xx}(M_o) > 0$ точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_o нет экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M_o требуется дальнейшее исследование.

Пример 9. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Находим частные производные первого порядка z'_x, z'_y, и критические точки, решив систему уравнении: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6y = 0 \\ z'_y = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ 6x^4 - 6x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ 6x\ (x-1) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$.

Получаем две критические точки M_1 (0; 0), M_2 (1; $\frac{1}{2}$). Обе точки принадлежат области определения функции. Найдем вторые производные для функции z.

$z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -6$, $z''_{yy} = 48y$

Для точки M_1 (0; 0) получаем: $\Delta = 6x \cdot 48y - (-6)^2 = 0 - 36 = -36 < 0$

Следовательно, в точке M_1 нет экстремума.

Для точки $M_2\ (1; \frac{1}{2})$ имеем: $\Delta = 6x \cdot 48y - (-6)^2 = 6 \cdot 48 \cdot \frac{1}{2} - 36 =$ $= 108 > 0.$

Следовательно, в точке M_2 есть экстремум, причем точка минимума ($z''_{\chi\chi} > 0$).

$z_{min} = z(M_2) = z(1; \frac{1}{2}) = 1^3 + 8(\frac{1}{2})^3 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$

Наименьшее и наибольшее значение функции двух переменных в ограниченной замкнутой области. Функция $z = z\ (x,\ y)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, всегда имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области, или в точках, лежащих на границе области. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в области D, нужно: 1) найти критические точки внутри области, и вычислить значение функции в них; 2) найти критические точки на всех граничных линиях области D, и вычислить значение функции в них; 3) найти значение функции в точках пересечения граничных линий; 4) выбрать из полученных значений большее и меньшее.

Пример 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^3 + \gamma^3 - 9xy + 27$ в области D, ограниченной линиями $y = x$, $x = 4,\ y = 0$ (рис. 3).

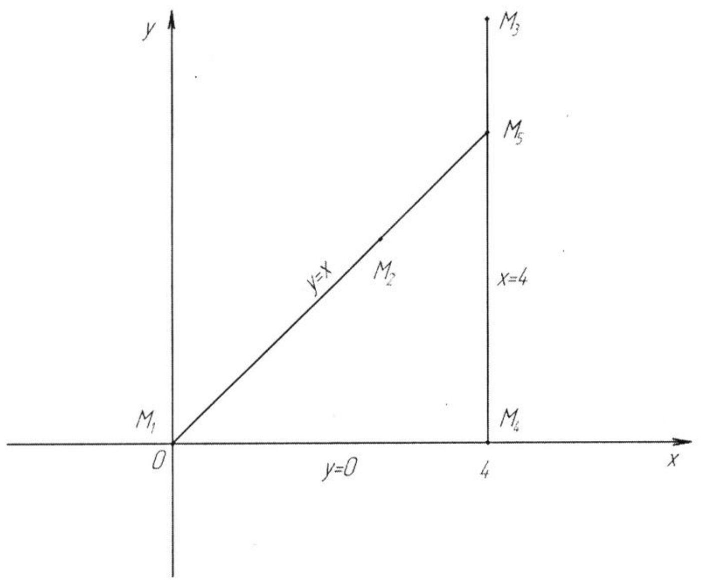

Рисунок 3

1) Найдем критические точки для функции z внутри области D. Для этого решим

систему уравнений: $\begin{cases} z'_\chi = 3x^2 - 9y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{x^4}{3} - 9x = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x(\frac{x^3}{3} - 9) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x = 0, x = 3 \end{cases}$.

Следовательно, получаем две критические точки M_1 (0; 0) и M_2 (3; 3), лежащие в области D. Найдем значение функции в этих точках:

$$z(M_1(0,0)) = 27$$

$$z(M_2(3,3)) = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 3 + 27 = 0.$$

2) Найдем критические точки на границе области D:

а) на граничной линии = 0, функция z принимает значения $z = x^3 + 27, x \in [0,4]$.

$z'_\chi = 3x^2 = 0$, следовательно, $x = 0$. На этой границе существует только одна критическая точка M_1 (0,0). Значение функции в этой точке уже вычислено.

б) на граничной линии $y = x$, функция z принимает значения $z = 2x^3 - 9x^2 + 27$, $x \in [0,4]$. $z'_x = 6x^2 - 18x = 0$, $6x(x-3) = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Получаем критические точки M_1 (0; 0) и M_2 (3; 3). Значение функции в этих точках уже найдено.

в) на граничной линии $x = 4$, функция z принимает значения $z = y^2 - 36y + 91$, $y \in [0,4]$, $z'_y = 2y - 36 = 0, y = 18$. Точка M_3 (4,18) не принадлежит области D, значение функции в этой точке не определяем.

3) Найдем значение функции z угловых точках области D.

$z(M_4(4,0)) = 4^3 + 27 = 91$;

$$z(M_5(4,4)) = 4^3 + 4^3 - 9 \cdot 4 \cdot 4 + 27 = 11.$$

4) Выбираем из полученных значений z наибольшее и наименьшее.

Наибольшее значение $z(M_4(4,0)) = 91$, наименьшее значение $z(M_1(3,3)) = 0$.

Производная в заданном направлении. Градиент функции. Функция $U = U(x, y, z)$ задает в пространстве скалярное поле, т. е. каждой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in V$ ставится в соответствие число $U(x_0, y_0, z_0) \in$ Градиентом скалярного поля $U = U(x, y, z)$ называется вектор $\overrightarrow{grad(U)}$, координатами которого являются частные производные функции U.

$\overrightarrow{grad(U)} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial_y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial_z}\vec{k}$.

Градиент скалярного поля U в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ показывает направление наибольшего роста функции $U = U(x, y, z)$.

Производной функции $U = U(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_o M} = \{cos\,\alpha , \cos\beta , \cos\gamma\}$, где $cos\,\alpha , \cos\beta , \cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, называется величина

$\frac{\partial U}{\partial \vec{s}} = \ lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x} \ \cdot \ \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \ \ \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \ \cos\gamma.$

Если направление $\vec{s}$ совпадает с направлением координатной оси, то производная по направлению дает частную производную.

Производная в данной точке по направлению вектора $\vec{s}$ имеет наибольшее значение, если это направление совпадает с вектором градиента. Это наибольшее значение равно $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}} = |\overrightarrow{grad(U)}| = \sqrt{(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial y})^2 + (\frac{\partial U}{\partial z})^2}$.

Если производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}} > 0$, то функция U возрастает в направлении вектора $\vec{s}$. Если производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}} < 0$, то функция U убывает в этом направлении.

Пример 11. Найти угол между градиентами скалярных полей $V = x^2 - y^2 - 3z^2$ и $U = \frac{\chi}{yz^2}$ в точке $M(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Найдем частные производные функции V и U в точке M

$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x|_M = 2\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\frac{\partial V}{\partial y} = -2y|_M = -2\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$\frac{\partial V}{\partial z} = -6z|_M = -6\,\frac{1}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{yz^2}|_M = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3\sqrt{2};$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\chi}{y^2z^2}|_M = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = -\frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$

$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{2x}{yz^3}|_M = -\frac{2\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^3} = -\frac{2}{\frac{1}{(\sqrt{3})^3}} = -2 \cdot 3\sqrt{3} = -6\sqrt{3};$

Запишем градиенты скалярных полей V и U:

$\overrightarrow{grad(V)} = \sqrt{2} \cdot \vec{\imath} - \sqrt{2} \cdot \vec{\jmath} - 2\sqrt{3} \cdot \vec{k};$

$\overrightarrow{grad(U)} = 3\sqrt{2} \cdot \vec{\imath} - 3\sqrt{2} \cdot \vec{\jmath} - 6\sqrt{3} \cdot \vec{k}.$

Воспользуемся формулой определения угла между векторами через скалярное произведение:

$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \cdot (-3\sqrt{2}) + (-2\sqrt{3}) \cdot (-6\sqrt{3})}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 + (-6\sqrt{3})^2}} = \frac{6+6+36}{\sqrt{2+2+12} \cdot \sqrt{18+18+108}} = \frac{48}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{144}} = \frac{48}{4 \cdot 12} = 1.$ Следовательно, угол $\varphi = 0°$.

Пример 12. Найти производную скалярного поля $U = x^2 - arctg(y + z)$ в точке

M (2,1,1) по направлению вектора $\vec{S} = 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$

Найдем частные производные функции U в точке M:

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x|_{M(2,1,1)} = 2 \cdot 2 = 4;$
$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{1+(y+z)^2}|_{M(2,1,1)} = \frac{1}{1+(1+1)^2} = \frac{1}{5};$
$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{1+(y+z)^2}|_{M(2,1,1)} = \frac{1}{1+(1+1)^2} = \frac{1}{5}.$

Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{S}$:

$\cos\alpha = 0;\ \ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5};\ \ \cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{-4}{5}$

Найдем производную функции U по направлению вектора $\overrightarrow{S}$:

$\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{S}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = 4 \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{(-4)}{5} = -\frac{1}{5}$

Так как производная $\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{S}} < 0$, то функция убывает в этом направлении.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Задание №1. Найти область определения функции $z = z\,(x, y)$.

$z = \frac{3xy}{2x - 5y}$

1.1. $z = \frac{1}{36 - 4x^2 - y^2}$

1.2. $z = \ln(xy)$

1.3. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$

1.4. $z = \frac{2}{6 - x^2 - y^2}$

1.5. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$

1.6. $z = \arccos(x + y)$

1.7. $z = \frac{3x + y}{2 - x + y}$

1.8. $z = \sqrt{9 - 3x^2 - y^2}$

1.9. $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$

Задание № 2. Найти частные производные первого порядка

1.1. $z = \ln(2y^2 - e^{-x})$

1.2. $z = arctg(\frac{x}{y^2})$

1.3. $z = 2^{3x^2 - xy}$

1.4. $z = \arcsin\sqrt{xy}$

1.5. $z = \sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}$

1.6. $z = tg(x^3 + y^2)$

1.7. $z = ctg\sqrt{xy^3}$

1.8. $z = e^{-x^2 + x^2}$

1.9. $z = \ln(3x^2 - y^4)$

1.10. $z = \arccos(\frac{y}{x})$

Задание № 3. Найти частные производные первого порядка для функции $U = U(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

3.1 $\boldsymbol{U = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}}$, $M_о$ (0, –1, 1)

3.2 $\boldsymbol{U = z \cdot \ln(x^3 + y^2)}$, $M_о$ (1, 2, 3)

3.3 $\boldsymbol{U = zx \cdot \sin(2x + y)}$, $M_о$ $(\frac{\pi}{4}$, 0, 2)

3.4 $\boldsymbol{U = \mathrm{lx}(x^3 + 2y^3 - z^3)}$, $M_о$ (2,1,0)

3.5 $\boldsymbol{U = \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{y^2+z^2}}}$, $M_о$ (1,0,1)

3.6 $\boldsymbol{U = \ln(\cos(x^2y^2 + z))}$, $M_о$ (0, 0, $\frac{\pi}{4}$)

3.7 $\boldsymbol{U = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}}$, $M_о$ (3,4,2)

3.8 $\boldsymbol{U = \mathrm{arctg}(xy^2 + z)}$, $M_о$ (2,1,0)

3.9 $\boldsymbol{U = \arcsin\left(\frac{x^2}{y} - z\right)}$, , $M_о$ (2,5,0)

3.10 $\boldsymbol{U = \sqrt{z}\sin(2x - y)}$, $M_о$ (0,0,4)

Задание № 4. Найдите полный дифференциал функции $z = z(x, y)$.

4.1 $\boldsymbol{z = 2x^3y - 4xy^5 - \frac{6x}{y^2} - 5x}$

4.2 $\boldsymbol{z = xy \cdot sin(xy)}$

4.3 $\boldsymbol{z = \frac{3x+y}{xy-5}}$

4.4 $\boldsymbol{z = 5xy^4 + 2x^2y^7 - 3x + y}$

4.5 $\boldsymbol{z = 3y^2x^3 - 5x - 4y^2 + 1}$

4.6 $\boldsymbol{z = cos(x^2 - y^2) + x^3}$

4.7 $\boldsymbol{z = ln(3x^2 - 2^y)}$

4.8 $\boldsymbol{z = 5xy^2 - 3x^3y^4 + x - 3y}$

4.9 $\boldsymbol{z = e^{x^2+xy}}$

4.10 $\boldsymbol{z = arctg(2x - y)}$

Задание № 5. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = z\ (x, y)$.

5.1 $\boldsymbol{z = e^{x^2 - y^2}}$

5.2 $\boldsymbol{z = 2^{(7x^2y+5)}}$

5.3 $\boldsymbol{z = arcctg(xy - 3)}$

5.4 $\boldsymbol{z = \cos(xy^2)}$

5.5 $\boldsymbol{z = arctg(x + y)}$

5.6 $\boldsymbol{z = \arcsin(x - y)}$

5.7 $\boldsymbol{z = \sin(x^2 - y)}$

5.8 $\boldsymbol{z = \arccos(2x - y)}$

5.9 $\boldsymbol{z = arcctg(x - 2y)}$

5.10 $\boldsymbol{z = \ln(3x^2 - y^2)}$

Задание № 6. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению функция $u = u\ (x, y)$.

6.1 $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\gamma \frac{\partial^z u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \frac{y}{x}$

6.2 $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3), u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$

6.3 $\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0, u = \ln\ (x^2 + (y+1)^2)$

6.4 $y \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = (1 + \mathrm{y} \ln \mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}, u = x^y.$

6.5 $x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, u = \frac{xy}{x+y}$

6.6 $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = e^{xy}.$

6.7 $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \mathrm{u} = \sin 2\ (x - ay).$

6.8 $x^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , u = y\sqrt{\frac{y}{x}}$

6.9 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{z}^2} = 0, u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

6.10 $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ , u = e^{-\cos(x+ay)}.$

Задание № 7. Исследовать функцию $z = z\ (x, y)$ на экстремум.

7.1 $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$

7.2 $z = x^3 + 8\gamma^3 - 6xy + 5$

7.3 $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$

7.4 $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

7.5 $z = \chi^3 + \gamma^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

7.6 $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$

7.7 $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$

7.8 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

7.9 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

7.10 $z = 6(x-y) - 3x^2 - 3\gamma^2$

Задание № 8. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = z\,(x, y)$ в области D

8.1 $z = 3x + y - xy$

$D: y = x,\ y = 4,\ x = 0.$

8.2 $z = xy - x - 2y,$

$D: x = 3,\ y = x, y = 0.$

8.3 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$

$D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2.$

8.4 $z = 5x^2 - 3xy + y^2,$

$D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1.$

8.5 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$

$D: x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0.$

8.6 $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,$

$D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0.$

8.7 $z = 2x^3 - xy^2 + y^2,$

$D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 6.$

8.8 $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,$

$D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0, y = 1.$

8.9 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$

$D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0.$

8.10 $z = x^2 + 2xy - 10,$

D: $y = 0,\ y = x^2 - 4.$

Задание № 9. Найдите угол между градиентами скалярных полей $U = U\,(x, y, z)$ и

$V = V\,(x, y, z)$ в точке M.

9. 1 $V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,\ U = \frac{yz^2}{x^2},\ M(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

9.2 $V = \frac{4\sqrt{6}}{X} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{Z},\ U = x^2yz^3,\ M(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

9.3 $V = 9\sqrt{2}\mathrm{x}^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}},\ U = \frac{z^3}{xy^2},\ M(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}).$

9. 4 $V = \frac{3}{\chi} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z},\ U = \frac{Z}{x^3y^2},\ M(1,2, \frac{1}{\sqrt{6}}).$

9.5 $V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,\ U = \frac{x^2}{yz^2},\ M(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}})$ ·

9.6 $V = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,\ U = \frac{\mathrm{z}^2}{xy^2},\ M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

9.7 $V = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2\mathrm{z}^3,\ U = \frac{xz^2}{y},\ M(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1)$.

9.8 $V = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$, $U = \frac{yz^2}{x}$, $M(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

9. 9 $V = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $U = \frac{xy^2}{z^2}$, $M(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

9.10 $V = \frac{3}{\chi} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $U = \frac{x^3y^2}{Z}$, $M(1{,}2, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Задание № 10. Найти производную скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$

10.1 $U = 4ln(3 + x^2) - 8xyz, \vec{S} = 2\vec{j} - 4\vec{j} + 4\vec{k}, M(1{,}1{,}1)$.

10.2 $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z})\ \vec{S} = 4\vec{\iota} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $M(2{,}4{,}4)$.

10.3 $U = -2In(x^2 - 5) - 4xyz, \vec{S} = 2\vec{\iota} + 4\vec{_f} - 4\vec{k}$, $M(1{,}1{,}1)$.

10.4 $U = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $\vec{S} = 2\vec{\iota} + 8\vec{_J} - 2\vec{k}$, $M(-2, \frac{1}{2}, 1)$.

10.5 $U = xz^2 - \sqrt{x^3y})\vec{S} = 2\vec{\iota} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $M(2{,}2{,}4)$.

10.6 $U = x\sqrt{y} - yz^2, \vec{S} = 2\vec{\iota} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, M(2{,}1, -1)$.

10.7 $U = 7ln(\frac{1}{13} + x^2) - 4xyz$, $\vec{S} = 14\vec{\iota} - 8\vec{j} + 8\vec{k}, M(1{,}1{,}1)$.

10. 8 $U = arctg\ (\frac{y}{\chi}) + xz$, $\vec{S} = 2\vec{\iota} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(2{,}2, -1)$.

10.9 $U = ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}, \vec{S} = 8\vec{\iota} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $M(1, -2{,}4)$.

10.10 $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, $\vec{S} = 2\vec{\iota} + 2\vec{j} - 24\vec{k}$, $M(3{,}4{,}1)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Задание № 1. Найти область определения функции $z = z(x, y)$.

1.1. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$

1.2. $z = \dfrac{4xy}{x - 3y + 1}$

1.3. $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$

1.4. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$

1.5. $z = \ln(y^2 - x^2)$

1.6. $z = \dfrac{x^3y}{3 + x - y}$

1.7. $z = \arccos(x + 2y)$

1.8. $z = xy + \sqrt{x + y}$

1.9. $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$

1.10. $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

1.11. $z = \log_2(3x - 4y - 1)$

1.12. $z = 4x + \dfrac{y}{2x - 5y}$

1.13. $z = \dfrac{\sqrt{3x - 2y}}{x^2 + y^2 + 4}$

1.14. $z = \dfrac{5}{4 - x^2 - y^2}$

1.15. $z = \ln(2x - y)$

1.16. $z = \dfrac{7x^3y}{x - 4y}$

1.17. $z = \sqrt{1 - x - y}$

1.18. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1$

1.19. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2 - 6}$

1.20. $z=\ln(2x^2-y)$

Задание № 2. Найти частные производные первого порядка

2.1 $z=arcctg\,(\frac{xy^2}{3})$

2.2 $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$

2.3 $z=\sin\sqrt{x-y^3}$

2.4 $z=tg(x^3y^4)$

2.5 $z=ctg(3x^3-2y)$

2.6 $z=e^{2x^2-y^2}$

2.7 $z=\ln(\sqrt{xy}-1)$

2.8 $z=arctg\,\frac{x^2}{y^3}$

2.9 $z=2\sin(xy+y^3)$

2.10 $z=\cos(x-\sqrt{xy^3})$

2.11 $z=e^{\cos 3x+y^2}$

2.12 $z=tg\,\frac{2x-y^2}{x}$

2.13 $z=\ln(2x-y)$

2.14 $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

2.15 $z=\arccos(x^3y)$

2.16 $z=\ln(3x^2-y^2)$

2.17 $z=arctg\,\frac{x^3}{y}$

2.18 $z=\cos\frac{x-y}{x^2+y^2}$

2.19 $z=\sin\sqrt{\frac{y}{x+y}}$

2.20 $z=arcc\sin(e^{xy})$

Задание №3. Найти частные производные первого порядка для функции $U=U(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$

3.1 $\boldsymbol{U=\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}}$, $M_o\,(-1,\,1,0)$

3.2 $\boldsymbol{U=\mathbf{arctg}\,(\frac{xz}{y^2})}$, $M_o\,(2,1,1)$

3.3 $\boldsymbol{U=\mathbf{ln}(\mathbf{tg}\left(\mathbf{x-2y+\frac{z}{4}}\right))}$,, $M_o\,(1,\frac{1}{2},\boldsymbol{\pi})$

3.4 $\boldsymbol{U=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}}$, $M_o\,(1,1,2)$

3.5 $\boldsymbol{U=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$, $M_o\,(1,2,2)$

3.6 $\boldsymbol{U=\mathbf{ln}(\mathbf{x+y^2})-\sqrt{\mathbf{xz}}}$, $M_o\,(5,2,3)$

3.7 $\boldsymbol{U=\sqrt{z}\cdot x^y}$, $M_o\,(1,2,4)$

3.8 $\boldsymbol{U=\mathbf{z}\cdot\sqrt{\mathbf{3x^2-y^2}}}$, $M_o\,(3,\sqrt{\mathbf{2}},5)$

3.9 $\boldsymbol{U=\mathbf{ln}(\mathbf{x^3}+\sqrt[3]{y}-\mathbf{z})}$,,
$M_o\,(2,1,8)$

3.10 $\boldsymbol{U=\frac{\mathbf{z}}{x^4+y^2}}$, $M_o\,(2,3,25)$

3.11 $\boldsymbol{U=\mathbf{z^2arctg}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2y}}}$, $M_o\,(2,1,2)$

3.12 $\boldsymbol{U=\mathbf{ln}(\sqrt[5]{\mathbf{x}}+\sqrt[4]{\mathbf{y}}-\mathbf{z})}$, $M_o\,(1,1,1)$

3.13 $\boldsymbol{U}=-\frac{\boldsymbol{2x}}{\sqrt{\boldsymbol{y^2+z^2}}}$, M_0 (–2,1,1)

3.14 $\boldsymbol{U}=\mathbf{z}\cdot\mathbf{e}^{-(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)}$, , M_0 (0,0,1)

3.15 $\boldsymbol{U}=\frac{\sin(x-y)}{z}$, M_0 $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$

3.16 $\boldsymbol{U}=\sqrt{\boldsymbol{z}}\cdot\ln(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{y}})$, M_0 (4,1,4)

3.17 $\boldsymbol{U}=\frac{xz}{2x^2y-3}$, M_0 (3,1,1)

3.18 $\boldsymbol{U}=\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2-2xy\cos z}}$, M_0 $(3,4,\frac{\pi}{2})$

3.19 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{e}^{-xy^2}$, M_0 (0,1,1)

3.20 $\boldsymbol{U}=\frac{3xy}{z^2+y^2}$, M_0 (1,–1,0)

Задание № 4. Найдите полный дифференциал функции $z = z\,(x, y)$.

4.1 $\boldsymbol{z=7x^3y-\sqrt{xy}}$

4.2 $\boldsymbol{z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}}$

4.3 $\boldsymbol{z=tg\,(\frac{x+y}{x-y})}$

4.4 $\boldsymbol{z=cos(3x+y)-x^2}$

4.5 $\boldsymbol{z=e^{3x+5y-1}}$

4.6 $\boldsymbol{z=ctg\,(\frac{x}{y})}$.

4.7 $\boldsymbol{z=xy^4-3x^2y+1}$

4.8 $\boldsymbol{z=2xy+\frac{x}{3y-1}}$

4.9 $\boldsymbol{z=2x^2y^2+x^3-y^3}$

4.10 $\boldsymbol{z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}}$

4.11 $\boldsymbol{z=cos(x^2\,y)-3xy}$

4.12 $\boldsymbol{z=\sqrt{x^2+3y^2+x}}$

4.13 $\boldsymbol{z=arcsin\,(\frac{x+y}{x})}$

4.14 $\boldsymbol{z=ln(y^2-x^2+3)}$

4.15 $\boldsymbol{z=arccos(x+y)}$

4.16 $\boldsymbol{z=y^2\,sin\,x-3xy-x^4}$

4.17 $\boldsymbol{z=2-x^3-y^3+5x}$

4.18 $\boldsymbol{z=7x-x^3y^2+y^4}$

4.19 $\boldsymbol{z=arctg(2x-y)}$

4.20 $\boldsymbol{z=\sqrt{xy-x^3+y}}$

Задание №5. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функции $z = z\,(x, y)$.

5.1 $\boldsymbol{z=e^{2x^2+y^2}}$

5.2 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{ctg}(\frac{y}{x})$
5.3 $\boldsymbol{z} = \cos(\boldsymbol{x^2y^2 - 5})$
5.4 $\boldsymbol{z} = \ln(\boldsymbol{3x^2 + 4y^2})$
5.5 $\boldsymbol{z} = \sin(\sqrt{\boldsymbol{x^2y}})$
5.6 $\boldsymbol{z} = \arcsin(\boldsymbol{x - 2y})$.
5.7 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{arctg}(\boldsymbol{5x + 2y})$
5.8 $\boldsymbol{z} = \cos(\boldsymbol{xy + 3})$
5.9 $\boldsymbol{z} = \arccos(\boldsymbol{4x - y})$
5.10 $\boldsymbol{z} = \ln(\boldsymbol{4x^2 - 5y^2})$
5.11 $\boldsymbol{z} = \ln(\boldsymbol{4 - x^2y^3})$
5.12 $\boldsymbol{z} = \arcsin(\boldsymbol{4x + y})$
5.13 $\boldsymbol{z} = \sin(\sqrt{\boldsymbol{xy}})$
5.14 $\boldsymbol{z} = \arccos(\boldsymbol{x - 5y})$
5.15 $\boldsymbol{z} = \cos(\boldsymbol{3x^2 - y^2})$
5.16 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{arctg}(\boldsymbol{3x - 2y})$
5.17 $\boldsymbol{z} = \ln(\boldsymbol{5x^2 - 3y^4})$
5.18 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{arcctg}(\boldsymbol{x - 4y})$
5.19 $\boldsymbol{z} = \ln(\boldsymbol{3xy - 4})$
5.20 $\boldsymbol{z} = \cos(\boldsymbol{5x - 4y^2})$

Задание № 6. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению функция $u = u\,(x, y)$.

6.1 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ $u = (x-y)(y-z)(z-x)$.

6.2 $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$, $u = x \ln \frac{y}{x}$

6.3 $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\, u = \ln\,(x^2 + y^2)$.

6.4 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0$ $u = e^{xy}$

6.5 $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0,\, u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$

6.6 $x\frac{\partial_{14}}{\partial x} + y\frac{\partial t1}{\partial y} + u = 0,\, u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

6.7 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 1,\, u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.8 $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u,\, u = (x^2 + y^2)\mathrm{tg}\frac{x}{y}$.

6.9 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\, u = e^{-(x+3y)}\sin\,(x + 3y)$.

6.10 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\, u = x \cdot e^{y/x}$.

6.11 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\, u = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{X}$.

6.12 $x\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0, u=\mathrm{arccg}\,\frac{x}{y}$

6.13 $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, u=\ln\,(x+e^{-y})$.

6.14 $x\frac{\partial \mathrm{tl}}{\partial \mathrm{x}}+y\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}=0, u=\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x+y}}$.

6.15 $\frac{1}{X}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{y}}\cdot\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{y}^2}, u=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$.

6.16 $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{x+y}{x-y}, u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$

6.17 $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{u}}, u=\sqrt{2xy+y^2}$

6.18 $\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}-\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2}=0, u=\ln(x^2-y^2)$.

Задание №7. Исследовать функцию *z* = *z* (*x*, *y*) на экстремум.

7.1 $z=\chi^2+xy+y^2-6x-9y$

7.2 $z=(x-2)^2+2y^2-10$.

7.3 $z=(x-5)^2+y^2+1$.

7.11 $z=x^3+y^3-3xy$.

7.12 $z=2xy-2x^2-4y^2$

7.4 $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$

7.5 $Z=2xy-5x^2-3y^2+2$

7.6 $z=xy(12-x-y)$.

7. 7 $z=xy-x^2-y^2+9$.

7.8 $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

7.9 $z=x^3+8y^3-6xy+1$.

7.10 $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

7.13 $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

7.14 $Z=xy(6-x-y)$.

7.15 $z=x^2+y^2-x\gamma+x+y$.

7.16 $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

7.17 $z=(x-1)^2+2y^2$

7.18 $z=xy-3x^2-2y^2$

7.19 $z=x^2+3(y+2)^2$

7.20 $z=2(x+y)-x^2-y^2$

Задание № 8. Найти наименьшее и наибольшее значение функции *z* = *z* (*x*, *y*) в области D

8.1 $z=xy-2x-y_l$

$D: x=0, x=3, y=0, y=4$.

8.2 $z=\frac{1}{2}x^2-xy$,

$D: y=8, y=2x^2$

8.3 $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$,

$D: x=0, y=0_l x+y-1=0$.

8.4 $z=2x^2+3y^2+1$,

$D: y=./9-\frac{9}{4}x^{2_l}y=0$.

8.5 $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$,

$D: x=-3, y=0, x+y+1=0$.

8. 6 $z=3x^2+3y^2-x-y+1$,

$D: x=5, y=0, x-y-1=0$.

8.7 $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x,$

$D: y = 2x, y = 2, x = 0.$

8.8 $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x,$

$D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$

8.9 $z = xy - 3x - 2y,$

$D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$

8.10 $z = x^2 + xy - 2,$

$D: y = 4x^2 - 4_t y = 0.$

8.11 $z = x^2y(4 - x - y)$,

$D: x = 0, y = 0, y = 6 - x.$

8.12 $z = x^3 + y^3 - 3xy,$

$D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$

8.13 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2,$

$D: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$

8.14 $z = x^2 + 2xy - \gamma^2 - 4x,$

$D: x = 3, y = 0, \gamma = x + 1.$

8.15 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,$

$D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

8.16 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y,$

$D: y = x + 2, y = 0, x = 2.$

8.17 $z = 4 - 2x^2 - y^2,$

$D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$

8.18 $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,$

$D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$

8.19 $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,$

$D: x + \gamma + 2 = 0, x = 0, y = 0.$

8.20 $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2,$

$D: x = 0, y = 0, x + y = 6.$

Задание № 9. Найдите угол между градиентами скалярных полей *U* = *U* (*x*, *y*, *z*) и *V* = *V* (*x*, *y*, *z*) в точке *M*.

9. 1 $V = -\frac{4\sqrt{2}}{\chi} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}, U = \frac{1}{x^2yz}, M(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

9.2 $V = \frac{6}{\chi} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $U = \frac{\chi^2}{y^2z^3}$, $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$

9.3 $V = x^2 + 9y^2 + 6z^2, U = xyz, M\ (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

9.4 $V = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}, U = \frac{y^3}{x^2z}, M(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}).$

9.5 $V = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, U = xy^2z$, $M(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$

9.6 $V=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}, U=\frac{x}{yz^2}, M(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}})$.

9.7 $V=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2z}}, U=\frac{y^2z^3}{x^2}, M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

9.8 $V=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}, U=\frac{y^2z^3}{\chi}, M(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

9.9 $V=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3, U=\frac{y}{xz^2}, M(\frac{1}{\sqrt{6}}{'}\frac{1}{\sqrt{6}},1)$.

9.10 $V=x^2-y^2-3z^2, U=\frac{yz^2}{x}, M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. 11 $V=\frac{3x^2}{\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\mathrm{z}^2, U=\frac{\mathrm{z}^2}{x^2y^2}, M(\frac{2}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}})$.

9. 12 $V=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}, U=\frac{\chi^2}{y^2z^3}, M\ (\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

9.13 $V=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2, U=x^2yz^3, M(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{3}{2}})$.

9.14 $V=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}, U=\frac{xy^2}{z^3}, M(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}})$.

9.15 $V=\sqrt{2}x^2-\frac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2, U=\frac{1}{xy^2z}, M(1,\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

9.16 $V=x^2+9y^2+6z^2, U=\frac{1}{xyz}, M(1,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

9.17 $V=\frac{1}{\sqrt{2}\chi}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}\ U=\frac{\chi}{y^2z^3}, M(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

9.18 $V=-\frac{4\sqrt{2}}{\chi}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}\chi}, U=x^2yz, M(2,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

9.19 $V=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}, U=\frac{y^2z^3}{x^2}, M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

9.20 $V=-\frac{3x^3}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}y^3}{3}+8\sqrt{3}z^3, U=\frac{x^2z}{y^3}, M(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}}{'}\frac{1}{2})$

Задание № 10. Найти производную скалярного поля $U = U\,(x, y, z)$ в точке $M\,(x,y, z)$

10.1 $U=x\sqrt{y}-(z+y)\sqrt{x}, \vec{S}=2\vec{\iota}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}, M(1,1,-2)$.

10.2 $U=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}, \vec{S}=2\vec{\iota}-2\vec{\jmath}-\vec{k}, M(1,1,0)$.

10.3 $U=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}, \vec{S}=4\vec{\iota}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}, M(0,-3,4)$.

10.4 $U=ln(1+x^2+y^z)-\sqrt{x^2+z^2}, \vec{S}=-6\vec{\iota}+3\vec{\jmath}+2\vec{k}, M(3,0,-4)$.

10.5 $=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}, \vec{S}=\vec{\iota}-\vec{\jmath}\rightarrow+\vec{k}, M(1,1,1)$.

10.6 $=x+ln\ (z^2\ +y^2), \vec{S}=-2\vec{\iota}+\vec{\jmath}-\vec{k}, M(2,1,1)$.

10.7 $U=x^2y-\sqrt{xy+z^2}, \vec{S}=2\vec{\iota}-2\vec{k}, M(1,5,-2)$.

10.8 $U=y\ln(1+x^2)-arctgz, \vec{S}=2\vec{\iota}-3\vec{\jmath}-2\vec{k}, M(0,1,1)$.

10.9 $U=\ln(3-x^2)+xy^2z, \vec{S}=-\vec{\iota}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}, M(1,3,2)$.

10.10 $U=x(\ln y-arctgz), \vec{S}=8\vec{\iota}+4\vec{\jmath}+8\vec{k}, M(-2,1,-1)$.

10.11 $U=\sin(x+2y)+\sqrt{\mathrm{xyz}}, \vec{S}=4\vec{\iota}+3\vec{\jmath}, M(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3)$.

10.12 $= x^2y^2z - ln(z-1), \vec{S} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\sqrt{5}\vec{k}, M(1,1,2).$

10.13 $U = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}) \ \vec{S} = \vec{\jmath} - \vec{k}, M(1,-3,4).$

10.14 $U = \frac{\sqrt{\chi}}{y} - \frac{yz}{x+\sqrt{y}}, \vec{s} = 2\vec{\imath} + \vec{k}, M(4,1,-2).$

10.15 $U = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}, \vec{S} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 1\overrightarrow{k,} M(1,1,0).$

10.16 $U = 2\sqrt{x+y} + y.\, arctgz\ , \vec{S} = 4\vec{\imath} - 3\overrightarrow{k,} M(3,-2,1).$

10.17 $U = z^2 + 2arctg(x-y)_, \vec{S} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\overrightarrow{k,} M(1,2,-1).$

10.18 $U = \ln(x^2+y^2) + xyz, \vec{S} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\overrightarrow{k,} M(1,-1,2).$

10.19 $U = xy - \frac{X}{Z}, \vec{S} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}, (-4,3,-1).$

10.20 $U = ln(x + \sqrt{y^2+z^2}), \vec{S} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}, M(1,-3,4).$

Литература.

1. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.

2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.

3. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 240 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 2: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие для студентов технических специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 396 с.