**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»**

Кафедра математики

Составитель
А. В. Чередниченко

# МАТЕМАТИКА: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
направления подготовки 15.03.05
Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств
в качестве электронного учебного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты
Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Николаева Е. А. – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

**Чередниченко Алла Валериевна**
**Математика: теория вероятностей:** методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся всех направлений бакалавриата и всех специальностей всех форм обучения / сост. А. В. Чередниченко; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», «Теория вероятностей».
Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по разделу «Математика: теория вероятностей» и организации самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математика: теория вероятностей».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

## *1. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Определение вероятности. Формулы комбинаторики*

**Теория вероятностей** представляет собой математическую науку, изучающую закономерности случайных явлений.

Под **событием** в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

- Событие называется *случайным*, если в результате опыта оно может либо произойти, либо не произойти.
- Событие называется *достоверным*, если оно обязательно происходит в результате опыта.
- Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном опыте.
- События называются *несовместными*, если они не могут произойти в одном опыте.
- Событие $A$ благоприятствует событию $B$, если из появления события $A$ следует, что произошло событие $B$.
- События образуют полную группу, если в результате опыта произойдёт хотя бы одно из них.
- Событие $C$ называется суммой событий $A$ и $B$, если оно состоит в появлении события А и/или появлении события $B$. Сумма событий обозначается $C = A + B$.
- Событие $C$ называется произведением событий $A$ и $B$, если оно состоит в появлении события $A$ и появлении события $B$. Обозначается $C = A \cdot B$.
- Событие $C$ называется разностью событий $A$ и $B$, если оно состоит в появлении события $A$ и не появлении события $B$. Обозначается $C = A - B$.
- Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию $A$, если оно состоит в непоявлении события $A$.
- События называются равновозможными, если нет объективных оснований считать, одно более возможно, чем другое.
- Равновозможные, несовместные образующие полную группу события называются исходами данного опыта.

**Вероятностью** события называется численная мера степени объективной возможности появления этого события.

**Вероятностью** (классическое определение вероятности) события $A$ называется отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов данного опыта.

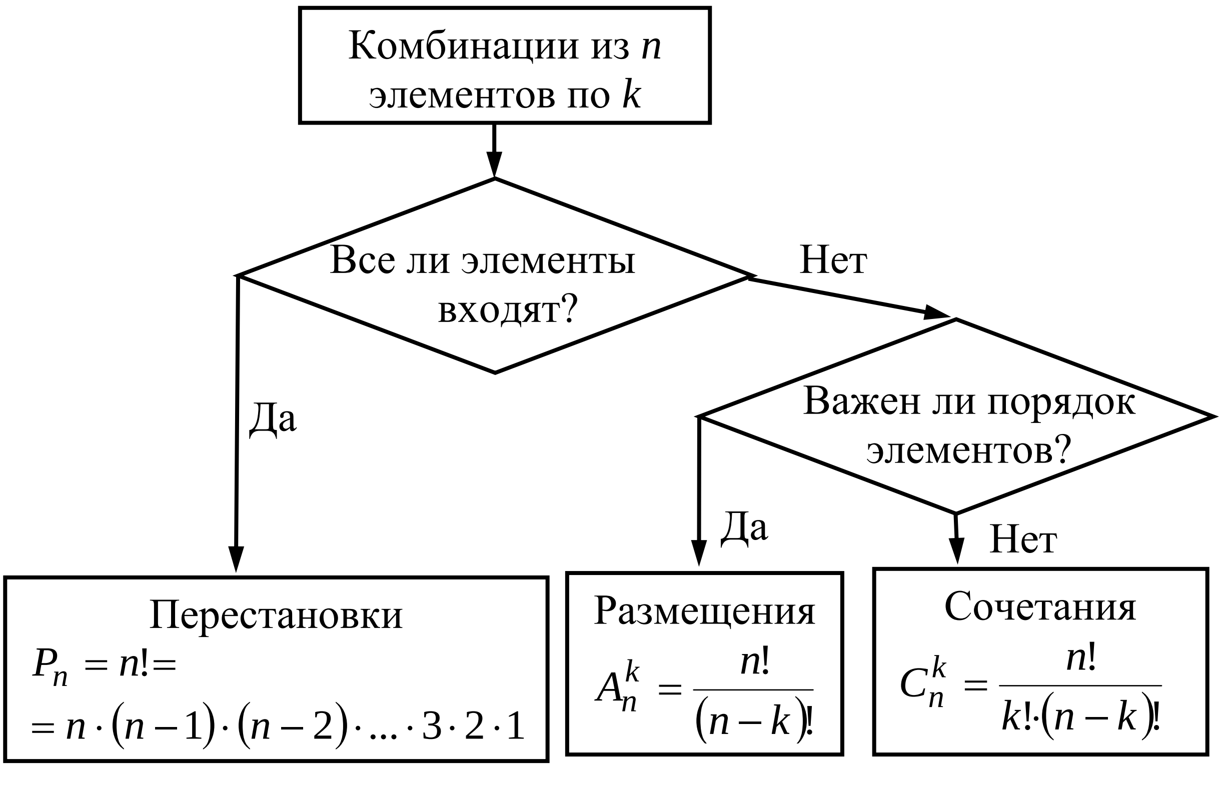
Вероятность события $A$ обозначается $p(A)$. Тогда $p(A)=\dfrac{m}{n}$, где $m$ – число благоприятных для появления события $A$ исходов; $n$ – число всевозможных исходов опыта.

Основные свойства вероятности:

- вероятность достоверного события равна единице;
- вероятность невозможного события равна нулю;
- для любого события $A$ его вероятность заключена в интервале $0 \le p(A) \le 1$;
- вероятность наступления противоположного события $\overline{A}$ равна разности между единицей и вероятностью события $A$, то есть $p(\overline{A})=1-p(A)$.

Расчет чисел $m$ и $n$ часто осуществляется с помощью формул комбинаторики для нахождения числа комбинаций элементов. Основными комбинациями являются перестановки, размещения и сочетания.

Выбор вида комбинаций элементов удобно проводить по блок-схеме:



***Пример* 1.** Имеется пятитомное собрание сочинений. Сколькими способами можно:

1) расставить книги на полке;

2) выбрать из них любые три тома;

3) выбрать и расставить на полке три тома?

***Решение.*** Имеем тома книг с номерами 1, 2, 3, 4, 5.

1) В первом случае расставляем разными способами все книги, то есть в комбинацию входят все элементы – 5 книг. При этом на первое место можно поставить любой из пяти элементов (книг), на второе – любой из оставшихся четырех элементов, на третье – из трех, на четвертое – из двух, на пятое остается один элемент. Таким образом, число способов расстановки книг на полке равно $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!=120$ – числу перестановок из всех пяти имеющихся элементов ($P_5=5!$).

2) Во втором случае, выбирая три книги из пяти, мы имеем дело с комбинациями, в которые входят не все элементы из пяти, а только три элемента. Эти комбинации отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, причем порядок не важен. Число таких комбинаций определяется как число сочетаний из пяти элементов по три:

$$C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!}=10.$$

3) В третьем случае при расстановке трех книг на полке выбираем из пяти элементов по три элемента, но учитываем порядок этих выбранных элементов. То есть внутри каждой тройки книг учитываем все возможные перестановки из трех элементов ($P_3$). Число комбинаций, отличающихся либо элементом, либо их порядком – это есть число размещений из пяти элементов по три:

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=3\cdot 4\cdot 5=60.$$

***Пример* 2.** Найти вероятности того, что номера трех томов, выбранных поочередно из данных пяти, будут идти в возрастающем порядке.

***Решение.*** Обозначим через $A$ интересующее нас событие. Общее число всех возможных исходов $n$ при выборе трех томов из пяти определяется по формуле для числа размещений

$n = A_5^3 = 60$. Число же тех исходов, в которых наблюдается только возрастание томов без учета перестановок внутри каждой тройки, определяется по формуле для числа сочетаний $m = C_5^3 = 10$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

**Практическое занятие**

1. Элементы комбинаторики.

1.1. Сколькими способами можно расставить 7 книг на книжной полке?

1.2. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

1.3. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что цифры в числе не повторяются?

1.4. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

1.5. Сколькими способами можно группу из 15 учащихся разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4, а в другой – 11 человек?

1.6. Из 20 студентов надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

1.7. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Сколько различных трехзначных чисел можно из них составить?

1.8. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

1.9. Для проведения экзамена по математике создается комиссия из двух человек, причем один из преподавателей должен быть назначен старшим. Сколько различных комиссий можно организовать, если имеется пять преподавателей?

1.10. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

1.11. Имеется шестизначная кодовая комбинация, состоящая из трех цифр 1, 3, 5, в которой цифра 1 встречается один раз, цифра 3 – два раза и цифра 5 – три раза. Сколько существует комбинаций таких наборов?

1.12. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

1.13. В почтовом отделении имеются открытки 3 видов. Сколькими способами можно купить набор из 5 открыток?

1.14. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

1.15. Сколько четырехбуквенных слов можно составить из букв $M$ и $A$?

2. Непосредственный подсчет вероятностей.

2.1. При стрельбе из винтовки вероятность попадания в цель равна 0,75. Найти число попаданий, если всего было произведено 140 выстрелов.

2.2. В лотерее разыгрывается тысяча билетов. Среди них один выигрыш в 50 рублей, пять выигрышей в 20 рублей, двадцать выигрышей по 10 рублей и пятьдесят выигрышей по 5 рублей. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выиграть не менее 10 рублей; б) какого-либо выигрыша.

2.3. Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах?

2.4. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадает четное число очков.

2.5. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, не содержит цифры 5.

2.6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу излеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну, б) две, в) три.

2.7. В ящике содержится 100 перемешанных жетонов, пронумерованных целыми числами от 1 до 100. Найти вероятность того, что извлечённый наудачу жетон имеет номер, который не делится ни на 2, ни на 3.

2.8. В урне а белых и в черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым.

После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

2.9. На 20 одинаковых жетонах написано 20 двухзначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

2.10. В мешке смешаны нити 5 сортов; 30% белых, 40% черных, 15% – красных, 10% зелёных, 5% голубых. Определить вероятность того, что наудачу взятая нить будет цветной.

2.11. В команде спортсменов 6 бегунов на короткие дистанции, 3 бегуна на длинные, 5 метателей, 7 борцов и 4 боксёра. Определить вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен будет легкоатлетом.

2.12. В пачке имеется 100 жетонов, занумерованных числами от 1 до 100.. Определить вероятность того, что номер наудачу взятого жетона будет кратным 25 или 30.

2.13. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что $A$ – выпадет одинаковое число очков; $B$ – сумма выпавших очков равна 8; $C$ – сумма выпавших очков четная; $Д$ – число очков, выпавших при первом броске, больше числа очков, выпавших при втором броске; $E$ – сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

2.14. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «мел». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

2.15. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «рама». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

## Самостоятельная работа

1. Элементы комбинаторики.

1.1. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

1.2. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколько может быть вариантов такой выдачи?

1.3. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый участник сыграл с каждым по одной партии, а партий было сыграно в 10 раз больше числа участников.

1.4. Имеются в неограниченном количестве палочки длиной 5, 6, 7, 8, 9, 10 см. Сколько различных треугольников можно из них составить?

1.5. Из 10 роз и 8 лилий нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 розы и 3 лилии. Сколькими способами это можно сделать?

1.6. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколько существует возможностей выбора этих пяти человек?

1.7. Сколькими способами можно расставить 8 томов энциклопедии на книжной полке так, чтобы первый и второй тома:

а) стояли рядом; б) не стояли рядом?

1.8. Даны две параллельные прямые. На одной из них имеется 10 точек, а на другой – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

1.9. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

1.10. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

1.11. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом? Стояли не рядом?

1.12. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных; в) 5 шаров одного цвета; г) 4 шара одного цвета?

1.13. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове: «ГОРА», «ИНСТИТУТ»?

1.14. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать три студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

1.15. Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в эстафете надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочек. Сколькими способами это можно сделать?

1.16. Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом – 5 и в третьем – 2 вакантных места?

Непосредственный подсчет вероятностей.

2.1. На одинаковых карточках написаны буквы а, а, б, г, е, р, л. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «алгебра»?

2.2. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наудачу последовательно вынимаются 3 карточки и ставятся слева направо в порядке появления. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число не содержит цифры 4?

2.3. В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

2.4. Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных?

2.5. Какова вероятность того, что три друга попадут в комиссию, состоящую из трех человек, если комиссию можно избрать из 15 человек?

2.6. Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу случайно берут 4 карточки и складывают в ряд. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?

2.7. Из колоды карт наудачу извлекается 3 карты. Найти вероятность того, что А – одна карта окажется бубновой масти;
В – 2 карты черви; С – все разной масти.

2.8. Из колоды карт извлекается 4 карты. Найти вероятность событий: А – все черви; В – три короля и одна дама; С – один туз, один король, одна дама, один валет; Д – разной масти.

2.9. В группе из 25 студентов оценку «отлично» получили трое студентов, «хорошо» – шесть студентов, «удовлетворительно» – девять студентов. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных студента имеют неудовлетворительные оценки.

2.11. В корзине 2 красных, 5 белых и 8 синих шара. Наудачу достают три шара. Найти вероятность событий: $A$ – все одного цвета; $B$ – все разного цвета; $C$ – есть два синих шара; $Д$ – ровно два шара одного цвета.

2.12. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наудачу последовательно вынимаются 3 карточки и ставятся слева направо в порядке появления. Чему равна вероятность того, что полученное таким образом трехзначное число не содержит цифры 4?

2.13. В партии из 10 деталей 4 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся нестандартными.

2.14. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось это же слово.

2.15. Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных?

2.16. На одинаковых карточках написаны буквы а, а, б, г, е, р, л. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «алгебра»?

2.17. Какова вероятность того, что три друга попадут в комиссию, состоящую из трех человек, если комиссию можно избрать из 15 человек?

2.18. Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу случайно берут 4 карточки и складывают в ряд. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?

2.18. Задумано трехзначное число. Какова вероятность того, что в задуманном числе есть хотя бы две одинаковые цифры?

2.19. На столе лежат 30 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, 3, …30. Преподаватель берет три любых билета. Какова вероятность того, что они из последней четверки?

2.20. Из 12 собранных аппаратов 3 получили высокую оценку. Определить вероятность того, что среди взятых наугад 4 аппаратов имеется 2 аппарата высокого качества.

## *2. Вероятность суммы и произведения событий. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.*

При нахождении вероятностей сложных событий следует пользоваться теоремами сложения, умножения и следствиями из них.

Суммой двух событий $A$ и $B$ называется событие $C$, которое заключается в том, что произошло или событие $A$, или событие $B$, или оба эти события вместе. При этом вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Это положение иллюстрируется следующей ситуацией. Студент сдает экзамен на оценку «удовлетворительно» с вероятностью 0,5; на оценку «хорошо» с вероятностью 0,3; на оценку «отлично» с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен на «хорошо» или «отлично»? Здесь – событие $A$ – получил «хорошо», а событие $B$ – получил «отлично», и эти события не могут произойти одновременно, то есть они несовместны. Событие $C$ – получил или «хорошо», или «отлично» является суммой событий $A$ и $B$. Поэтому вероятность этого события $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$

Произведением двух событий $A$ и $B$ называется событие $C$, которое заключается в том, что произошло и событие $A$, и событие $B$, то есть оба эти события произошли вместе. Если события происходят независимо друг от друга, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Например, известно, что студент получит зачет по математике с вероятностью 0,6, а зачет по иностранному языку с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что он получит оба зачета. Здесь событие $A$ – студент получит зачет по математике, событие $B$ – получит зачет по иностранному языку, и эти события независимые. Тогда событие $C$, которое заключается в том, что студент получит и первый зачет, и второй, есть произведение двух событий $A$ и $B$. Вероятность этого события $P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$.

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или не произошло второе событие. Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если любая комбинация из них независима.

События называются *зависимыми*, если появление или непоявление одного из них изменяет вероятность появления другого. Вероятность события $B$, вычисленная в предположении осуществления события $A$, называется *условной вероятностью* события $B$ и обозначается $p_A(B)$ или $p(B/A)$.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло. То есть

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A).$$

Если событие $A$ может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ...., H_n$, образующих полную группу несовместных событий, то вероятность события $A$ равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, ...., H_n$ на соответствующую условную вероятность события $A$:

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(H_k) \cdot p_{H_k}(A).$$

Это формула называется формулой полной вероятности, события $H_1, H_2, ...., H_n$ – гипотезы, причём сумма вероятностей гипотез равна единице, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} p(H_k) = 1.$$

Формула Байеса применяется при решении практических задач в том случае, когда событие $A$, появляющееся совместно с каким-либо из событий $H_1, H_2, ...., H_n$, произошло и требуется произвести количественную переоценку вероятностей событий

$H_1, H_2, ...., H_n$ (события $H_1, H_2, ...., H_n$, образуют полную группу несовместных событий).

Априорные вероятности: $p(H_1)$, $p(H_2)$, $p(H_n)$ известны. Требуется вычислить апостериорные вероятности: $p_A(H_1)$, $p_A(H_2),\ldots, p_A(H_n)$.

Пусть событие $A$ может наступить при условии появления одной из гипотез $H_1, H_2, ...., H_n$. Вероятность совместного появления события $A$ с одной из гипотез $H_m$ по теореме умножения равна

$$p(A \cdot H_m) = p(A) \cdot p_A(H_m) = p(H_m) \cdot p_{H_m}(A),$$

отсюда получаем

$$p_A(H_m) = \frac{p(H_m) \cdot p_{H_m}(A)}{p(A)}$$

или

$$p_A(H_m) = \frac{p(H_m) \cdot p_{H_m}(A)}{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) + \ldots + p(H_n) \cdot p_{H_n}(A)}.$$

***Пример* 3.** Два стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,7. Найти вероятности следующих событий: а) оба стрелка попали в мишень; б) в мишень попал хотя бы один стрелок.

***Решение.*** Пусть событие $A$ – попадание в мишень первым стрелком, $B$ – вторым.

а) Событие $C$ заключается в том, что и первый стрелок, и второй попали в мишень. То есть событие $C$ является произведением событий $A$ и $B$: $C = A \cdot B$. Так как события $A$ и $B$ происходят независимо друг от друга, то вероятность того, что оба попали в мишень $P(C) = P(A \cdot B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

б) Рассмотрим теперь событие $D$ – попадание в мишень хотя бы одним стрелком. Оно заключается в поражении мишени либо первым стрелком, либо вторым, либо обоими вместе. Рассматриваемое событие $D$ имеет своей противоположностью событие $E$ – ни один стрелок не попал в мишень. То есть и первый стрелок не попал в мишень, и второй не попал. Обозначим событие $\bar{A}$ – первый стрелок не попал, $\bar{A}$ – второй не попал. Вероятность того, что первый стрелок не попал в мишень $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Вероятность того, что второй стрелок не попал в мишень $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Тогда вероятность того, что оба не попадут, найдем как произведение вероятностей $P(E) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$. Отсюда вероятность события $D$, что мишень поразит хотя бы один стрелок, $P(D) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

***Пример* 4.** Пластмассовые заготовки для деталей поступают с пресса № 1, выпускающего 50% всей продукции, с пресса № 2, выпускающего 30%, и с пресса № 3, дающего 20%. При этом доля нестандартной продукции у первого пресса 0,10, у второго – 0,05, а у третьего – 0,02. Найти вероятности событий: а) наудачу взятая заготовка оказалась стандартной; б) наудачу взятая заготовка оказалась стандартной, найти вероятность того, что она поступила с первого пресса.

***Решение.*** 1) Обозначим, что событие $A$ – взятая заготовка стандартная. Она могла быть изготовлена прессом № 1 (гипотеза $H_1$), прессом № 2 (гипотеза $H_2$) или прессом № 3 – $H_3$. Вероятности этих гипотез соответственно равны $P(H_1) = 0{,}5$; $P(H_2) = 0{,}3$; $P(H_3) = 0{,}2$. Вероятность того, что заготовка стандартная, если она изготовлена прессом № 1: $P_{H_1}(A) = 0{,}9$; если прессом № 2, то $P_{H_2}(A) = 0{,}95$; если прессом № 3, то $P_{H_3}(A) = 0{,}98$.

Событие $A$ следует рассматривать как комбинацию событий: заготовка поступила с пресса № 1 и она выполнена стандартной; или заготовка поступила с пресса № 2 и она выполнена стандартной; или заготовка поступила с пресса № 3 и она выполнена стандартной. Учитывая формулы сложения и умножения вероятностей, найдем полную вероятность события $A$:

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}98 = 0{,}931.$$

В общем случае полная вероятность события $A$, определяется по формуле:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P_{Hj}(A),$$

где $P(H_j)$ – вероятность наступления $j$-ой гипотезы;

$P_{Hj}(A)$ – вероятность наступления события $A$ по этой гипотезе; $n$ –.число гипотез.

2) Для нахождения вероятности наступления $j$-ой гипотезы, если известно, что событие $A$ произошло, используется формула Байеса:

$$P_A(H_j) = \frac{P(H_j) \cdot P_{H_j}(A)}{P(A)}.$$

Тогда вероятность того, что заготовка изготовлена первым прессом, при условии, что она стандартная

$$P_A(H_1) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}931} \approx 0{,}483.$$

Аналогично можно найти условные вероятности гипотез $H_2$ и $H_3$. При этом должно выполняться условие $P_A(H_1) + P_A(H_2) + P_A(H_3) = 1$.

**Практическое занятие**

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3.1. В ящике 7 белых шаров и 8 черных. Найти вероятность того что взяли 1 белый; 2 черных; 3 белых.

3.2. Студент сдает математику с вероятностью 0,7, физику с вероятностью 0,8, философию – 0,9. Найти вероятности: А – сдаст все экзамены; В – сдаст хотя бы один экзамен; С – сдаст ровно два экзамена; Д – сдаст ровно один экзамен? (0,504; 0,994; 0,398; 0,092)

3.3. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос преподаватель задает еще один вопрос? (28/29)

3.4. Программа экзамена содержит 30 вопросов, из которых студент знает только 15. Для успешной сдачи экзамена нужно ответить на 2 предложенных вопроса, или на один из них и дополнительный вопрос. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

3.5. В городе 4 библиотеки, в фонде каждой из которых с вероятностью 0,4 есть нужная студенту книга. В поисках книги студент обходит библиотеки пока не найдет ее или пока не обойдет все библиотеки. Найти вероятность: А – студент посетит

2 библиотеки; В – не более двух библиотек; С – четыре библиотеки. Что вероятнее: найдет книгу, или нет? (0,24; 0,64)

3.6. Три друга идут сдавать экзамен. Вероятность сдачи для первого – 0,9, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятности: А – все сдадут экзамен; В – сдаст ровно один из них; С – сдадут больше двух; Д – сдаст хотя бы один. (0,36; 0,14; 0,49; 0,99)

4. Формулы полной вероятности и Байеса.

4.1. Болты изготавливаются на 3 станках, производящих соответственно 25%, 30%, 45% общего количества продукции. В продукции станков брак составляет соответственно 4%, 3%, 2%. Какова вероятность, что случайно взятый болт окажется дефектным?

4.2. В тире имеется 5 ружей, вероятности из попадания из которых соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

4.3. Вероятности правильного определения химического состава детали для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4 и 2/5. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка, если равновероятно деталь может попасть на проверку к любому из контролеров.

4.4. Из 25 приборов, имеющихся в магазине, 5 штук произведены заводом № 1, 12 штук – заводом № 2 и 8 штук – заводом № 3. Вероятность того, что прибор, изготовленный заводом № 1, в течение гарантийного срока не выйдет из строя, равна 0,95. Для прибора 2-го завода такая вероятность равна 0,9, а 3-го завода – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый прибор выдержит гарантийный срок.

4.5. Два токаря обрабатывают одинаковые детали. Вероятность брака первого – 0,03; второго – 0,04. Обработанные детали складываются в одно место. При этом первый токарь изготавливает деталей в 2 раза больше, чем второй. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

4.6. В железнодорожном составе 50 вагонов с углем двух сортов. По сортности угля вагоны состава делятся на три группы: 25 вагонов содержат 70% угля первого сорта и 30% угля второго сорта, 15 вагонов содержат соответственно 60% и 40%, остальные – 85% и 15%. Случайно взятый для анализа уголь оказался второго сорта. Какова вероятность, что он взят из вагона первой группы?

4.7. В трех одинаковых по виду и размеру коробках находятся по 20 сверл. В первой коробке 2 сверла бракованные, во второй – 3, в третьей – 5. Взятое наудачу сверло оказалось годным. Какова вероятность того, что оно взято из второй коробки?

4.8. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется годной, равна 0,96. Контролер ОТК проверяет детали по упрощенной системе. Вероятность ошибки при проверке годных деталей равна 0,02, при проверке негодных деталей – 0,01. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее контроль, является годным?

4.9. В телеателье поступили кинескопы с двух заводов: 35 штук с первого завода и 50 – со второго. Вероятность того, что кинескоп, изготовленный на первом заводе, не выйдет из строя в течение гарантированного срока, равна 0,85. Аналогичная вероятность для второго завода – 0,7. Наудачу выбранный кинескоп выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что он был изготовлен на втором заводе.

4.10. У рабочего есть 10 сверл, 2 из которых имеют дефект. Вероятность того, что в течение смены сверло не придется менять, равна 0,6 для сверла, не имеющего дефект, и 0,3 – для сверла с дефектом. Наудачу взятое сверло в течение смены сломалось. Какова вероятность того, что было взято сверло без дефекта?

4.11. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях направлено из 1 группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей групп попадет в сборную университета, равны соответственно 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал студент?

4.12. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20% пряжи составляет продукция цеха № 2, а остальная – цеха № 1. Продукция цеха № 1 содержит 90%, а цеха № 2 – 70% пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Какова вероятность, что он из цеха № 1?

**Самостоятельная работа**

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

3.1. Электрическая схема состоит из 3 блоков, работающих независимо друг от друга. Вероятности того, что они работают исправно, соответственно, равны 0,8; 0,4; 0,7. Схема годна к эксплуатации при наличии хотя бы двух исправных блоков из трех. Определить вероятность того, что схема будет работать.

3.2. В лотерее 20 билетов, из них 4 выигрышных и 16 пустых. Взят один билет, содержание которого осталось неизвестным. Какова вероятность того, что второй вынутый билет выигрышный?

3.3. В двух коробках находятся электролампы одинаковой величины и формы, но разной мощности. В первой коробке 4 лампы на 60 ватт и 6 на 100 ватт; во второй соответственно – 5 и 7. Из обеих коробок наудачу берут по одной лампе. Какова вероятность того, что обе лампы одинаковой мощности?

3.4. Система состоит из двух приборов: основного и дублирующего. Вероятность безотказной работы основного прибора системы равна 0,9, а дублирующего прибора – 0,8. При выходе основного прибора из строя происходит мгновенное переключение системы на дублирующий прибор. Определить вероятность безотказной работы системы.

3.5. В первой корзине 4 белых и 6 черных шаров; во второй – 5 белых и 5 черных; в третьей 7 белых и 3 черных шара. Из каждой корзины достают по одному шару. Найти вероятности, что среди этих шаров: А – все белые; В – ровно один белый; С – хотя бы один белый; Д – два белых шара (0,14; 0,36; 0,91;0,41).

3.6. Два стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,8, а вторым – 0,7. Найти вероятности следующих событий: а) оба стрелка попали в мишень; б) в мишень попал хотя бы один стрелок.

3.7. В группе из 30 учеников на контрольной работе получили: 6 учеников оценки отлично, 10 учеников оценку хорошо, 9 человек оценку удовлетворительно. Какова вероятность того, что все три ученика, вызванных к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

3.8. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: 1) два мальчика, 2) две девочки, 3) девочка и мальчик?

3.9. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

4. Формулы полной вероятности и Байеса.

4.1. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,1, второй – 0,2, третий – 0,05. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

4.2. В железнодорожном составе 50 вагонов с углем двух сортов. По сортности угля вагоны состава делятся на три группы: 25 вагонов содержат 70% угля первого сорта и 30% угля второго сорта, 15 вагонов содержат соответственно 60% и 40%, остальные – 85% и 15%. Случайно взятый для анализа уголь оказался второго сорта. Какова вероятность, что он взят из вагона первой группы?

4.3. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора, аварийный – в 20% случаев. Вероятность выхода прибора из строя в нормальном режиме равна 0,1, в аварийном режиме– 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя.

4.4. Вероятности правильного определения химического состава детали для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4 и 2/5. Найти вероятность того, что будет допущена ошибка, если равновероятно деталь может попасть на проверку к любому из контролеров.

4.5. В трех одинаковых по виду и размеру коробках находятся по 20 сверл. В первой коробке 2 сверла бракованные, во второй – 3, в третьей – 5. Взятое наудачу сверло оказалось годным. Какова вероятность того, что оно взято из второй коробки?

4.6. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется годной, равна 0,96. Контролер ОТК проверяет детали по упрощенной системе. Вероятность ошибки при проверке годных деталей равна 0,02, при проверке негодных деталей – 0,01. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее контроль, является годным?

4.7. У рабочего есть 10 сверл, 2 из которых имеют дефект. Вероятность того, что в течение смены сверло не придется менять, равна 0,8 для сверла, не имеющего дефект, и 0,2 – для сверла с дефектом. Наудачу взятое сверло в течение смены сломалось. Какова вероятность того, что было взято сверло без дефекта?

4.8. Болты изготавливаются на 3 станках, производящих соответственно 25%, 30%, 45% общего количества продукции. В продукции станков брак составляет соответственно 4%, 3%, 2%. Какова вероятность, что случайно взятый болт окажется дефектным?

4.9. Двадцати пяти студентам предоставлено для производственной практики 10 мест в Барнауле, 8 – в Хабаровске и 7 – в Томске. Найти вероятность того, что три друга попадут в один город.

4.10. Имеются две коробки с предохранителями. В первой коробке находится 12 штук, во второй – 10 штук, причем в каждой коробке есть по одному бракованному предохранителю. Изделие, взятое наудачу из первой коробки, перекладывается во вторую. Определить вероятность извлечения после этого бракованного предохранителя из второй коробки.

4.11. В телеателье поступили кинескопы с двух заводов: 35 штук с первого завода и 50 – со второго. Вероятность того, что кинескоп, изготовленный на первом заводе, не выйдет из строя в течение гарантированного срока, равна 0,85. Аналогичная вероятность для второго завода – 0,7. Наудачу выбранный кинескоп выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что он был изготовлен на втором заводе.

## *3. Повторные независимые испытания. Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона.*

### *3.1. Формула Бернулли.*

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие $A$. При этом представляет интерес не исход каждого отдельного испытания, а общее число появлений события $A$ в результате определённого количества испытаний. В подобных задачах нужно уметь определять вероятность любого числа $m$ появлений события $A$ в результате общего числа $n$ испытаний. Рассмотрим случай независимых испытаний. Испытания называются *независимыми*, если результат одного испытания не зависит от результатов других испытаний и вероятность появления события $A$ в каждом испытании постоянна.

Пусть происходит $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие $A$ может либо появиться с вероятностью $p$, либо не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Рассмотрим некоторое событие $B_m$, состоящее в том, что событие $A$ в этих $n$ испытаниях появилось ровно $m$ раз и, следовательно, не появилось $(n - m)$ раз. Обозначим через $A_k$ $(k = 1, 2, 3, ..., n)$ появление события $A$ в $k$-м испытании, через $\overline{A_k}$ – непоявление события $A$ в $k$-м испытании. Тогда по условию

$$p(A_1) = p(A_2) = ... = p(A_n) = p$$
$$p(\overline{A_1}) = p(\overline{A_2}) = ... = p(\overline{A_n}) = q.$$

Событие может появиться $m$ раз в различных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием $\overline{A}$. Число возможных комбинаций такого рода равно числу сочетаний из $n$ элементов по $m$, то есть $C_n^m$. Следовательно, событие $B_m$ можно представить в виде суммы различных комбинаций, несовместных между собой, причём число слагаемых будет равно $C_n^m$.

В каждое слагаемое событие $A$ входит $m$ раз, а событие $\overline{A}$ входит $(n-m)$ раз. Вероятность каждой такой последовательности по теореме умножения равна $\left(p^{m} \cdot q^{n-m}\right)$. Так как общее число таких последовательностей равно $C_n^m$, то, используя теорему сложения для несовместных событий, получим вероятность события $B_m$, равную $C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ или

$$p_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \text{ – формула Бернулли}$$

Частные случаи схемы Бернулли. В серии из $n$ экспериментов

- Событие А не произойдет ни разу:

$$P_n(0) = \frac{n!}{0!n!} P^{0}(1-p)^{n} = q^{n} \qquad \text{где } q = 1-p$$

- Событие А произойдет $n$ раз:

$$P_n\,(n) = \frac{n!}{n!0!} P^{n}(1-P)^{0} = P^{n}$$

- Событие А произойдет 1 раз:

$$P_n(1) = \frac{n!}{1!(n-1!)} P^{1}\,(1-P)^{n-1} = n \cdot p \cdot q^{n-1}$$

- Событие А произойдет хотя бы один раз:

$$P_n(\geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^{\,n}$$

- Событие А произойдетт не менее $K$ раз:

$$P_n(\leq K) = \sum_{m=0}^{K} P_n(m)$$

***Пример* 5.** Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 2 раза.

***Решение.*** Число повторных независимых испытаний – подбрасываний монеты $n = 5$ – мало. Вероятность выпадения герба в одном испытании $p = \frac{1}{2}$, вероятность противоположного события – выпадения цифры: $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Тогда вероятность выпадения двух гербов $(k = 2)$ следует определять по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 32} = \frac{5}{16}.$$

### *3.2. Формулы Муавра - Лапласа.*

При большом числе испытаний пользоваться формулой Бернулли достаточно трудно. Поэтому при большом числе испытаний $(n \geq 20)$ пользуются целым рядом приблизительных формул.

Производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появится событие $A$. Вероятность наступления события $A$ в каждом испытании постоянна и равна $p$ $(0 < p < 1)$. Если число испытаний велико, то вероятность наступления события $A$ ровно $m$ раз (безразлично, в какой последовательности) приближённо может быть найдена по асимптотической формуле Лапласа:

$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - n \cdot p}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $q = 1 - p$; $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1)функция $\varphi(x)$ чётная, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2)для $x > 4$ значение функции $\varphi(x)$ близко к нулю.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в приложении, табл. 1.

Производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие $A$. Вероятность наступления события $A$ в каждом испытании постоянна и равна $p$ $(0 < p < 1)$. Если число испытаний велико, то вероятность того, что событие $A$ наступит не менее $a$ раз и не более $b$ раз, приближённо равно

$$p(a \leq m \leq b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $m$ – число появлений событий $A$ в $n$ испытаниях;

$$x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}};\quad x_2=\frac{b-np}{\sqrt{npq}};\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ – функция Лапласа.

Свойства функции $\Phi(x)$:

3)функция $\Phi(x)$ нечётная, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

4) для $x>5$ значение функции $\Phi(x)\approx 0{,}5$.

Значения функции $\Phi(x)$ приведены в приложении, табл. 2.

***Пример* 6.** В городе каждая десятая машина – иномарка. За час по центральной улице проезжает 900 машин. Какова вероятность того, что иномарки составляют среди них: а) ровно 90 машин; б) не более 90 машин.

***Решение.*** Число независимых испытаний $n=900$ – велико, а вероятность появления иномарки $p=0{,}1$ не близка к нулю. В этих условиях используют приближенные формулы Муавра – Лапласа.

1) Событие: появление иномарки, должно появиться ровно $k$ раз. Для нахождения вероятности будем использовать локальную формулу:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}\cdot}\cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}},\text{ где } q=1-p.$$

По условию: $n=900,\ k=90,\ p=0{,}1,\ q=0{,}9.$

Тогда искомая вероятность

$$P_{900}(90)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 900\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\cdot e^{-\frac{(90-900\cdot 0{,}1)^2}{2\cdot 900\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\approx 0{,}044.$$

2) Так как нас интересует вероятность появления события не более 90 раз, то применяем интегральную формулу:

$$P(k_1<k<k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $k_1$ и $k_2$ – границы интервала, в котором находится число появлений события;

$$x_1=\frac{\kappa_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{\kappa_2-np}{\sqrt{npq}},\ q=1-p.$$

Получим

$$P_{900}(\text{ не более } 90) = P_{900}(0 \le k \le 90) \approx$$
$$\approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0) - \Phi(-30) = 0 + \Phi(30) = 0 + 0{,}5 = 0{,}5,$$

где $x_1 = \dfrac{\kappa_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0 - 900 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \dfrac{-90}{3} = -30,$

$$x_2 = \frac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 900 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{0}{3} = 0.$$

По прил. 1 определим значения функции Лапласа $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-30) = -\Phi(30) = -0{,}5$ (функция Лапласа нечетная, поэтому $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и при $x > 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$).

Итак, $P_{900}(\textit{ не более } 90) = 0{,}5$.

***3.3. Формула Пуассона.***

Производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие $A$. Вероятность наступления события $A$ в каждом испытании постоянна и равна $p$. Если число испытаний велико, а вероятность $p$ очень мала, то вероятность появления события $A$ ровно $m$ раз в $n$ испытаниях приближённо определяется по формуле Пуассона:

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

Формула Пуассона применяется для $\lambda \le 10$.

***Пример* 7.** Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность издания бракованной книги равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит две бракованные книги.

***Решение.*** Так как число испытаний $n = 10000$ – велико, а вероятность $p = 0{,}0001$ близка к нулю, то используем формулу Пуассона: $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где параметр $\lambda = n \cdot p$, а $k$ – число благоприятных исходов. Для этого определим параметр $\lambda = n \cdot p = 1$ и вычислим

$$P_{10000}(2) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}18.$$

## Практическое занятие

5. Повторные независимые испытания.

5.1. Производится 3 выстрела, вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Найти вероятности того, что будет ровно одно; два; три попадания.

5.2. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,3. Наугад выбираются 4 студента. Найти вероятности того, что среди них получают стипендию: ровно 1; ровно 2; ровно 3; никто не получает.

5.3. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб будет более 2 раз.

5.4. В комнате 6 электролампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она придет в негодность в течение года, равна 3/4. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не более двух лампочек?

5.5. Вероятность того, что расход воды на предприятии не превысит нормы в течение суток, равна 0,75. Найти вероятность того, что в течение 7 дней расход воды будет нормальным более 5 дней?

5.6. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,10. Какова вероятность того, что в сообщении из 8 знаков будет искажено не более трех знаков?

5.7. 5% телевизоров одного из телевизионных заводов требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что из 5 телевизоров более трех потребуют ремонта.

5.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

5.9. Вероятность того, что студент – девушка, равна 0,4. Найти вероятность, что из 800 студентов девушек меньше 200; более 500.

5.10. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,002 отходит в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

5.11. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени $T$ равна 0,005. Найти вероятность того, что произойдет не более 3 обрывов.

5.12. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Какова вероятность того, что из 600 пассажиров опоздают не более двух?

5.13. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 42 размера, равна 0,4. Найти вероятность того, что из 900 покупателей не более 460 потребуют обувь этого размера.

5.14. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха от 400 до 520 раз?

5.15. Вероятность того, что человек имеет высшее образование в России 0,3. Какова вероятность того, что из 100 случайно взятых человек высшее образование имеют более 20%?

5.16. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий хотя бы одно не выдержит испытание.

5.17. Магазин получил 2000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти вероятность того, что магазин получит более трех разбитых бутылок.

## Самостоятельная работа

5. Повторные независимые испытания.

5.1. В комнате 6 электролампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она придет в негодность в течение года, равна 3/4. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не более двух лампочек?

5.2. На склад поступило 400 коробок с хрустальными вазами. Вероятность того, что в наугад взятой коробке все вазы целы, равна 0,9. Какова вероятность того, что вазы целы в 350 коробках?

5.3. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,10. Какова вероятность того, что в сообщении из 8 знаков будет искажено не более двух знаков?

5.4. 5% телевизоров одного из телевизионных заводов требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что из 5 телевизоров более трех потребуют ремонта.

5.5. Вратарь парирует в среднем 0,3 всех одиннадцатиметровых штрафных ударов. Какова вероятность того, что он возьмет три из четырех мячей?

5.6. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Какова вероятность того, что из 600 пассажиров опоздают не более двух?

5.7. Вероятность того, что расход воды на предприятии не превысит нормы в течение суток, равна 0,75. Найти вероятность того, что в течение 7 дней расход воды будет нормальным более 5 дней?

5.8. Средний процент нарушения работы конвейера составляет 10%. Найти вероятность того, что из 12 случайных проверок в более чем 10 проверках конвейер работал нормально.

5.9. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 42 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 900 покупателей не более 160 потребуют обувь этого размера.

5.10. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени $T$ равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение промежутка времени $T$ произойдет не более 3 обрывов.

5.11. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых опытов равна 0,8. Какова вероятность появления успеха от 400 до 520 раз?

5.12. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,002 отходит в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

5.13. Издательство выпускает 30% книг в мягком переплете. Какова вероятность того, что из 210 книг, поступивших в магазин, книги в мягком переплете составляют от 80 до 100?

5.14. В студии телевидения имеются 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

5.15. Вероятность того, что человек имеет высшее образование в России 0,14. Какова вероятность того, что из 100 случайно взятых человек высшее образование имеют более 20%?

### *4. Дискретные случайные величины. Ряд и функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Биномиальное распределение.*

*Дискретной* называют такую случайную величину, которая принимает конечное или бесконечное счётное множество значений.

Примером дискретной случайной величины могут являться: число дефектных деталей в партии, число заявок, число отказов элементов за определённое время и так далее.

*Законом распределения случайной величины* называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Таблица, содержащая возможные значения случайной величины и соответствующие вероятности, называется *рядом распределения* случайной величины, и выглядит она следующим образом:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | .... | $x_i$ | .... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | .... | $p_i$ | .... |

Функция распределения является наиболее общей формой задания закона распределения случайной величины. Она используется как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Обозначается $F(x)$.

*Функция распределения* задает вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, меньше фиксированного действительного числа $x$, то есть $F(x) = p(X < x)$.

Свойства функции распределения.

1. Функция распределения $F(x)$ есть неотрицательная функция, заключённая в промежутке: $0 \le F(x) \le 1$.

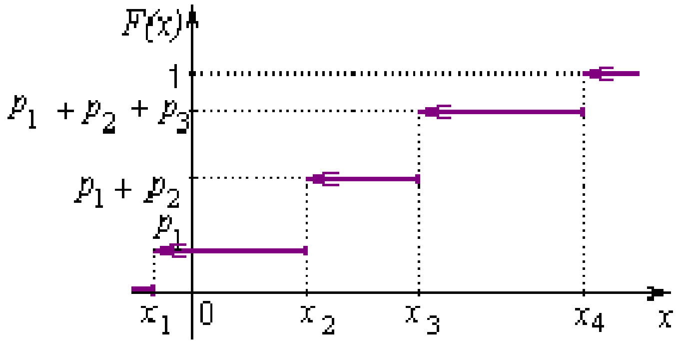
2. Функция распределения $F(x)$ случайной величины есть неубывающая функция, то есть из $x_2 > x_1$ следует $F(x_2) > F(x_1)$.

3. На минус бесконечности функция $F(x)$ распределения равна нулю, а на плюс бесконечности функция $F(x)$ распределения равна единице, то есть $F(-\infty) = 0;\ F(\infty) = 1$.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le x_1 \\ p_1 & при \quad x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2 & при \quad x_2 < x \le x_3 \\ p_1+p_2+p_3 & при \quad x_3 < x \le x_4 \\ \quad \ldots\ldots\ldots & \\ 1 & при \quad x > x_n \end{cases}$$

Графически функцию распределения можно задать следующим образом:




Основные законы распределения дискретной случайной величины

| Геометрический | Биномиальный | Пуассона |
|---|---|---|
| $P(X=k)=q^{k-1}p$<br>$q=1-p$ | $P_n(k)=P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$<br>$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ | $P_n(k)=P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$<br>$n$ – велико, $p$ – мало;<br>$\lambda$ – параметр, $\lambda=np$. |

При составлении закона распределения случайной величины для нахождения вероятностей возможных значений можно использовать основные теоремы и формулы теории вероятностей.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, но он не всегда бывает известен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины.

*Математическое ожидание* дискретной случайной величины – это число, равное сумме произведений всех возможных значений на их вероятности, то есть

$$M(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k .$$

*Свойства математического ожидания.*

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной, то есть $M(c)=c$, где $c-\text{const}$.

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания, то есть $M(c\cdot x)=c\cdot M(x)$.

3. Математическое ожидание суммы двух независимых случайных величин равно сумме их математических ожиданий, то есть $M(x+y)=M(x)+M(y)$.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, то есть $M(x\cdot y)=M(x)\cdot M(y)$.

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от её математического ожидания равно нулю, то есть $M(x-M(x))=0$.

*Модой $M_0$ дискретной случайной величины* называется её значение, имеющее наибольшую вероятность.

*Дисперсией* случайной величины $X$ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания $D(x)=M(x-M(x))^2$.

Дисперсия характеризует меру рассеяния случайной величины вокруг математического ожидания. Недостатком дисперсии является то, что она имеет размерность квадрата случайной величины и её неудобно использовать для характеристики разброса.

Этих недостатков лишено *среднее квадратическое отклонение* случайной величины, которое представляет собой квадратный корень из дисперсии $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$.

*Основные свойства дисперсии.*

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю, $D(c)=0$, где $c-\text{const}$.

2. Постоянный множитель случайной величины можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат $D(c\cdot x)=c^2\cdot D(x)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(x+y)=D(x)+D(y)$.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, $D(x-y)=D(x)+D(y)$.

5. Дисперсия случайной величины $X$, равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины $X$ и квадратом её математического ожидания, $D(x)=M\left(x^2\right)-M^2(x)$.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

| | **Геометрический** | **Биномиальный** | **Пуассона** |
|---|---|---|---|
| $M[X]$ | $\frac{1}{p}$ | $np$ | $\lambda$ |
| $D[X]$ | $\frac{q}{p^2}$ | $np$ | $\lambda$ |
| $\sigma[X]$ | $\frac{\sqrt{q}}{p}$ | $\sqrt{np}$ . | $\sqrt{\lambda}$ |

***Пример* 8.** Рабочий обслуживает два станка. В течение смены первый станок потребует внимания рабочего с вероятностью 0,2, второй – с вероятностью 0,3. Составить закон распределения числа станков, потребовавших внимания рабочего в течение смены. Вычислить его числовые характеристики.

***Решение.*** Дискретная случайная величина $X$ – число станков, потребовавших внимания рабочего. Обозначим событие $A_i$ – внимание потребовал $i$-й станок, тогда, $\overline{A_i}$ – $i$-й станок не потребовал внимания рабочего. Итак, $P(A_1)=0{,}2$, $P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0{,}8$; $P(A_2)=0{,}3$; $P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=0{,}7$.

Определим вероятность того, что случайная величина $X$ примет возможные значения 0, 1, 2.

$X=0$ – и первый станок не потребовал внимания, и второй не потребовал:

$$P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_1})=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56.$$

$X=1$ – первый потребовал, а второй не потребовал, или наоборот:

$$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}+\cdot\overline{A}_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}14+0{,}24=0{,}38.$$

$X=2$ – и первый потребовал внимания, и второй:
$P(X=2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}06.$

Составим закон распределения:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,56 | 0,38 | 0,06 |

Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{3}p_i=0{,}56+0{,}38+0{,}06=1.$

Вычислим основные числовые характеристики. Математическое ожидание $M(X)$ равно

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}56+1\cdot 0{,}38+2\cdot 0{,}06=0{,}5.$$

Дисперсия находится по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$.

Составим закон распределения квадрата случайной величины $X$:

| $X^2$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,56 | 0,38 | 0,06 |

$M\left(X^2\right)=0\cdot 0{,}56+1\cdot 0{,}38+4\cdot 0{,}06=0{,}62.$

$D(X)=0{,}62-(0{,}5)^2=0{,}37.$

Среднее квадратическое отклонение:
$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}37}\approx 0{,}61.$

В ряде задач на повторные независимые испытания вычисление вероятностей возможных значений случайной величины и ее числовых характеристик упрощается.

***Пример* 9.** В магазине независимо друг от друга работают 3 кассы, каждая с вероятностью 0,9. Составить закон распределения числа работающих касс. Вычислить его числовые характеристики.

***Решение.*** Случайная величина $X$ – число работающих касс может принимать четыре значения: $X=0,1,2,3$.

Соответствующие вероятности найдем по формуле Бернулли при $n=3;\ p=0{,}9;\ q=1-p=0{,}1$.

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot p^0\cdot q^3=\frac{3!}{0!\cdot 3!}\cdot 0{,}9^0\cdot 0{,}1^3=0{,}001;$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot p^1\cdot q^2=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot 0{,}9^1\cdot 0{,}1^2=0{,}027;$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^1=0{,}243;$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot p^3\cdot q^0=\frac{3!}{3!\cdot 0!}\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^0=0{,}729.$$

Запишем закон распределения случайной величины:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | 0,001 | 0,027 | 0,243 | 0,729 |

Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i=0{,}01+0{,}027+0{,}243+0{,}729=1$. Закон распределения составлен правильно.

Так как случайная величина имеет биномиальный закон распределения, то математическое ожидание $M(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}9=2{,}7$.

Дисперсия $D(X)=n\cdot p\cdot q=3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}27$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}52$.

Особую трудность у студентов вызывает составление закона распределения. Поясним этот процесс еще на одном примере.

***Пример* 10.** Выпускник вуза хочет устроиться на работу на одно из 3 предприятий. Вероятность трудоустройства на каждое из них равна 0,6. Случайная величина $X$ – число предприятий, которое посетил студент, причем, если студента взяли на работу на одном предприятии, на другое он уже не идет. Составить закон распределения случайной величины $X$.

***Решение.*** Случайная величина $X$ может принимать значения $X=1, 2, 3$. Пусть событие $A$ – студента взяли на работу, $\overline{A}$ – не взяли (противоположное событие).

Вычислим вероятность значений случайной величины:

$X=1$ – студента взяло на работу первое предприятие. $P(X=1)=P(A)=0{,}6$.

$X=2$ – на первом предприятии отказали, взяли на втором. $P(X=2)=P(\overline{A}\cdot A)=0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}24.$

$X=3$ – на первом предприятии отказали, и на втором отказали, взяли на третьем, или на всех трех отказали.

$$P(X=3)=P(\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot A+\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\overline{A})=0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}16.$$

Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{3}p_i=0{,}6+0{,}24+0{,}16=1.$

## Практическое занятие

6. Дискретная случайная величина.

Составить ряд распределения случайной величины $X$ и вычислить ее числовые характеристики.

6.1. Вероятность выигрыша по лотерейному билету 0,2. Случайная величина $X$ – число выигравших билетов из трех купленных.

6.2. Студент сдает в сессию экзамены с вероятностями: математику – 0,8, физику – 0,7, историю – 0,9. Случайная величина $X$ – число сданных экзаменов.

6.3. Студент может сдавать экзамен 3 раза, после чего его отчисляют. Вероятность сдать с 1-го раза равна 0,6, со 2-го – 0,7, с 3-го – 0,8. Случайная величина $X$ – число приходов на экзамен. Записать функцию распределения.

6.4. Студент получает «5» за экзамен: по математике с вероятностью 0,2, по физике – 0,1, по истории – 0,4. Случайная величина $X$ – число «пятерок» в сессию.

6.5. Студент ищет нужную формулу в 3 справочниках, причем если нашел, то дальше не ищет. Вероятность найти формулу в 1-ом справочнике – 0,4, во 2-м – 0,5, в 3-м – 0,7. Случайная величина $X$ – число просмотренных справочников.

6.6. Шахматист должен сыграть с тремя другими шахматистами. Он знает, что вероятность выиграть у 1-го равна 0,9, у 2-го – 0,7, у 3-го – 0,3. Случайная величина $X$ – число выигранных партий.

6.7. У студента в сумке учебники по математике, физике, истории, геологии. Ему нужно достать учебник по математике, и он наугад достает по одному, пока не достанет нужный. Случайная величина $X$ – число вынутых учебников.

6.8. Студент посещает занятия с вероятностями: первую пару с вероятностью – 0,6, 2-ю – 0,9, 3-ю – 0,8. Случайная величина $X$ – число пар, на которых был студент.

6.9. У охотника 3 патрона и он стреляет в дичь пока не попадет, или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина $X$ – число израсходованных патронов. Записать функцию распределения.

6.10. В колоде 36 карт, сдают 6 карт. Случайная величина $X$ – число тузов среди сданных карт.

6.11. Вероятность того, что студент получает стипендию, равна 0,4. Случайная величина $X$ – число студентов, получающих стипендию из 4-х наугад выбранных.

6.12. У дежурного гостиницы в кармане 4 различных ключа. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь комнаты. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если проверенный ключ не возвращается обратно. Найти его числовые характеристики.

**Самостоятельная работа**

6. Дискретная случайная величина.

6.1. Составить ряд распределения случайной величины $X$ и вычислить ее числовые характеристики.

6.2. В партии из 5 изделий 2 имеют скрытый дефект. Реализовано 4 изделия. Составить закон распределения числа качественных изделий среди реализованных изделий и найти его числовые характеристики.

6.3. В компьютерном зале 3 компьютера. Вероятность того, что в течение часа первый компьютер будет свободен, равна 0,1; второй – 0,15; третий – 0,2. Составить закон распределения числа свободных компьютеров в течение часа и найти его числовые характеристики.

6.4. Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения числа появления 5 очков и найти его числовые характеристики.

6.5. Имеется три справочника. Вероятность того, что нужная информация содержится в первом справочнике, равна 0,6; во втором – 0,5; в третьем – 0,4. Студент ищет нужную информацию, пока ее не найдет. Если находит, то больше не ищет. Составить закон распределения числа использованных студентом справочников и найти его числовые характеристики.

6.6. Студент выучил 30 вопросов из 40. Экзаменационный билет содержит 2 вопроса. Составить закон распределения числа правильных ответов на вопросы билета и найти его числовые характеристики.

6.7. У стрелка 4 патрона. Он стреляет по мишени, пока не промахнется или пока не кончатся патроны. Составить закон распределения числа использованных патронов, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7, и найти его числовые характеристики.

6.8. Студент может приходить сдавать экзамен 3 раза, и если все 3 раза получил «неудовлетворительно», то его отчисляют. Вероятность сдачи экзамена 0,8. Составить закон распределения числа приходов студента на экзамен и вычислить его числовые характеристики.

6.9. В партии 10% бракованных изделий. Случайным образом отобраны 3 изделия. Составить закон распределения числа стандартных изделий среди отобранных и найти его числовые характеристики.

6.10. Два станка с числовым программным управлением обрабатывают по одной одинаковой детали. Вероятность изготовления стандартной детали для первого станка – 0,95; для второго – 0,9. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди изготовленных двух и вычислить его числовые характеристики.

6.11. Электронное устройство содержит 4 предохранителя. Каждый предохранитель срабатывает с вероятностью 0,8. Составить закон распределения числа сработавших предохранителей и найти его числовые характеристики.

6.12. Составить закон распределения числа попаданий в мишень при трех выстрелах, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти его числовые характеристики.

6.13. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок не потребует регулировки, равна 0,8; второй – 0,7; третий – 0,9. Составить закон распределения числа станков, которые в течение часа потребуют регулировки, и найти его числовые характеристики.

6.14. У дежурного гостиницы в кармане 4 различных ключа. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь комнаты. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если проверенный ключ не возвращается обратно. Найти его числовые характеристики.

6.15. Вероятность сдачи экзамена по математике для каждого из 4 студентов равна 0,7. Составить закон распределения числа студентов, не сдавших экзамен. Найти его числовые характеристики.

6.16. Имеется 4 микросхемы, каждая из которых с вероятностью 0,2 имеет дефект. При включении в цепь дефектная микросхема перегорает и подключается следующая. Составить закон распределения числа подключенных микросхем. Найти его числовые характеристики.

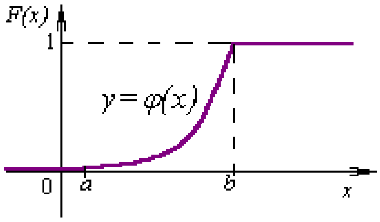
## *5. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность распределения, их свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное и равномерное распределение.*

### *5.1. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность распределения, их свойства.*

*Непрерывной* называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного интервала. Примером непрерывной случайной величины могут являться время безотказной работы отдельных элементов системы, погрешность измерения физических величин.

Случайные величины обычно обозначаются заглавными буквами конца латинского алфавита – $X, Y, Z...$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами – $x, y, z...$ Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a \\ \varphi\,(x) & \text{при} \quad a < x \le b \\ 1 & \text{при} \quad x > b \end{cases}$$




Непрерывную случайную величину можно задать не только интегральной функцией распределения, но и дифференциальной функцией. Для непрерывной случайной величины производная функции распределения $F'(x) = f(x)$ называется функцией плотности вероятности или дифференциальной функцией распределения. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Свойства плотности распределения:

1) плотность распределения больше либо равна нулю для любого значения аргумента, то есть $f(x) \geq 0$;

2) так как интегральная функция распределения неубывающая, следовательно, её производная неотрицательная;

3) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[\alpha, \beta]$ находится по формуле

$$p(\alpha \leq x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4) условие нормировки: интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

*Математическое ожидание* непрерывной случайной величины $X$ находится по формуле

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x).$$

*Модой* $M_0$ *непрерывной случайной величины* называется такое её значение, при котором плотность распределения имеет максимум.

*Медианой* случайной величины $M_e$ называют такое её значение, для которого справедливо равенство

$p(X < M_e) = p(X > M_e)$, то есть равновероятно, что случайная величина окажется больше или меньше медианы.

*Дисперсией* случайной величины $X$ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D(x) = M(x - M(x))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2.$$

***Пример 10.*** Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \sin 2x & при \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 & при \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

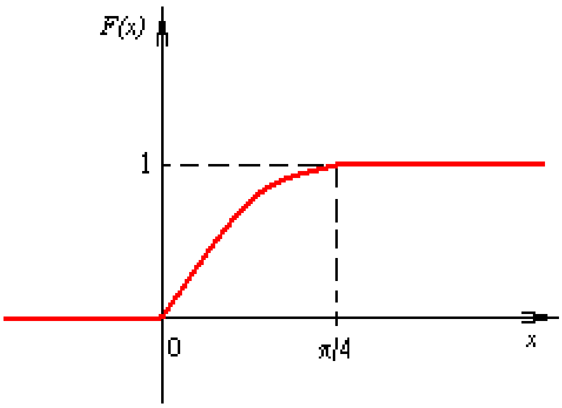
Найти плотность вероятности случайной величины $X$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

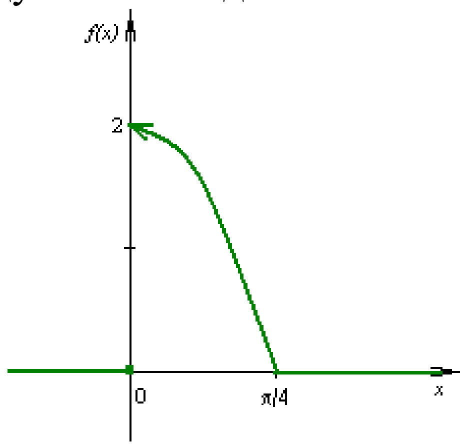
***Решение:***

1) Плотность распределения вероятностей есть первая производная от функции распределения, т. е.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ 2\cos 2x & при \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & при \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Графики этих функций будут иметь вид:



## Практическое занятие

1. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7. *X* – число СУ, перевыполнивших план. Составить закон распределения. Вычислить числовые характеристики. Построить функцию распределения.

2. *X* – непрерывная случайная величина, задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0; & x<1 \\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right); & 1\le x\le 2 \\ 1; & x>2 \end{cases}.$$

Найти плотность распределения вероятностей, числовые характеристики, вероятность попадания СВ в интервал: $[1{,}5;1{,}9]$, $[1{,}2;\,2{,}3]$.

3. Из пункта С ведется стрельба из орудия. Предполагается, что дальность полета распределена нормально и среднее его значение 1000 м, с отклонением 5 м. Определить (%), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 метров. Записать функции плотности и распределения.

4. *X* – непрерывная случайная величина, задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ Ax-4 & 2\le x\le 3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

Найти А, функцию распределения, числовые характеристики.

## Самостоятельная работа

1. Случайная величина *X* задана функцией распределения (интегральной функцией) *F(x)*. Найти: а) дифференциальную функцию *f(x)* (плотность вероятности); б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятность попадания случайной величины в заданный интервал ($\alpha$; $\beta$), то есть $P(\alpha<X<\beta)$; г) Построить *F(x)* и *f(x)*.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5\cdot x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, & 0<x<10,\\ 1, & x\ge 10\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

1) a=1, b=2; a=5, b=8; a=0, b=3.
2) a=1, b=5; a=6, b=12; a= –1, b=4.
3) a= – 1, b=1; a=2, b=10; a= –3, b=1.

2. Случайная величина *X* имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0\\ Ax+\dfrac{1}{12} & при\ 0\le x\le 4\\ 0 & при\ x>4\end{cases}.$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0\\ Ax^2+\dfrac{1}{20} & при\ 0\le x\le 4\\ 0 & при\ x>0\end{cases}$$

Найти коэффициент *A*. Записать функцию распределения данной случайной величины. Найти числовые характеристики.

3. Функция распределения случайной величины $t$ – времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид $F(t)=1-e^{-\frac{t}{3}}$. Найти: а) вероятность безотказной работы радиоаппаратуры в течение трех лет; б) плотность вероятности $f(t)$; в) математическое ожидание и дисперсию.

.

***5.2. Нормальный закон распределения.***

Нормальное распределение – наиболее часто встречающийся вид распределения. С ним приходится встречаться при анализе погрешностей измерений, контроле технологических процессов и режимов, а также при анализе и прогнозировании различных явлений в биологии, медицине и других областях знаний.

Термин «нормальное распределение» применяется в условном смысле как общепринятый в литературе, хотя и не совсем удачный. Так, утверждение, что какой-то признак подчиняется нормальному закону распределения, вовсе не означает наличие каких-либо незыблемых норм, якобы лежащих в основе явления, отражением которого является рассматриваемый признак, а подчинение другим законам распределения не означает какую-то анормальность данного явления.

Главная особенность нормального распределения состоит в том, что оно является предельным, к которому приближаются другие распределения. Нормальное распределение впервые открыто Муавром в 1733 году. Нормальному закону подчиняются только непрерывные случайные величины. Плотность нормального закона распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание для этого распределения равно $M(x)=a$. Дисперсия равна $D(x)=\sigma^2$.

Основные свойства нормального распределения.

1. Функция плотности распределения определена на всей числовой оси $Ox$, то есть каждому значению $x$ соответствует вполне определённое значение функции.

2. При всех значениях $x$ (как положительных, так и отрицательных) функция плотности принимает положительные значения, то есть нормальная кривая расположена над осью $Ox$.

3. Предел функции плотности при неограниченном возрастании $x$ равен нулю, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

4. Функция плотности нормального распределения в точке $x=a$ имеет максимум $f(a)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5. График функции плотности $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$.

6. Кривая распределения имеет две точки перегиба с координатами $\left(a - \sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a + \sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$.

7. Мода и медиана нормального распределения совпадают с математическим ожиданием $a$.

8. Форма нормальной кривой не изменяется при изменении параметра $a$.

9. Коэффициенты асимметрии и эксцесса нормального распределения равны нулю.

Очевидна важность вычисления этих коэффициентов для эмпирических рядов распределения, так как они характеризуют скошеннность и крутость данного ряда по сравнению с нормальным.

Вероятность попадания в интервал $(\beta; \gamma)$ находится по формуле

$$p(\beta \le x \le \gamma) = \Phi\left(\frac{\gamma - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – нечётная табулированная функция.

***Пример 11.*** Изготавливаемые цехом детали по длине распределяются по нормальному закону со средним значением 20 см и дисперсией, равной 0,2 см$^2$. Записать плотность распределения случайной величины $X$ (длина детали). Определить вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) будет заключена в пределах от 19,7 см до 20,3 см; б) превысит 20,3 см.

***Решение.*** Плотность вероятности нормального закона распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a$ – среднее значение случайной величины, $\sigma^2$ – дисперсия. Так среднее значение длины детали $\grave{a} = 20$, дисперсия $\sigma^2 = 0{,}2$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,2} \approx 0,45$, то искомая плотность вероятности имеет вид $f(x) = \frac{1}{0,45 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{0,4}}$.

а) Вероятность того, что случайная величина примет значение $\alpha \le X \le \beta$ находится по формуле:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

Вероятность того, что случайная величина – длина детали примет значение в пределах промежутка от 19,7 до 20,3, равна

$$P(19,7 \le X \le 20,3) = \Phi\left(\frac{20,3 - 20}{0,45}\right) - \Phi\left(\frac{19,7 - 20}{0,45}\right) =$$

$$= \Phi(0,67) - \Phi(-0,67) = 2\Phi(0,67) = 0,4980.$$

б) Аналогично рассматривается вероятность превышения длины детали 20,3 см.

$$P(X > 20,3) = P(20,3 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 20}{0,45}\right) - \Phi\left(\frac{20,3 - 20}{0,45}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(0,67) = 0,5 - 0,249 = 0,251.$$

## Практическое занятие

1. Вес вылавливаемых в прудах зеркальных карпов *X* – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 500 г, и средним квадратическим отклонением – 75 г. Записать плотность вероятности случайной величины *X*. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого карпа: а) заключен в пределах от 425 г до 550 г; б) более 700 г; в) менее 400 г.

2. Некоторая категория работников имеет среднюю зарплату 16 тыс. рублей и среднее квадратическое отклонение зарплаты 4 тыс. рублей. Предполагая, что зарплата *X* – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить процент работников, получающих зарплату: а) более 20 тыс. рублей; б) менее 8 тыс. рублей; в) от 15 до 18 тыс. рублей.

3. Длина изготавливаемых станком-автоматом деталей представляет собой случайную величину $X$, имеющую нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 200 см, и среднеквадратическим отклонением – 0,2 см. Записать плотность распределения случайной величины $X$. Определить вероятность брака, если допустимые размеры детали 20 + 0,3 см.

4. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Предполагая, что вес m – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить вероятность того, что вес случайно взятого человека: а) отличается от среднего не более чем на 5 кг; б) находится в пределах от 62 до 66 кг; в) менее 50 кг.

5. В нормально распределенной совокупности 15% значений $X$ меньше 12, а 40% значений $X$ больше 16,2. Найти среднее значение и среднее квадратическое отклонение данного распределения.

**Самостоятельная работа**

1. Игральную кость бросают 80 раз. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 будет заключено число m выпадений шестерки.

2. Вес вылавливаемых в прудах зеркальных карпов $X$ – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 500 г, и средним квадратическим отклонением – 75 г. Записать плотность вероятности случайной величины $X$. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого карпа: а) заключен в пределах от 425 г до 550 г; б) не более 700 г.

3. Стрельба ведется по цели вдоль некоторой прямой линии. Средняя дальность полета равна 1200 м. Предполагая, что дальность полета снаряда $X$ – случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 40 м, записать функцию плотности вероятности случайной величины $X$. Определить, какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 20 до 60 м

4. Средний процент выполнения плана некоторыми предприятиями составляет 106%, среднее квадратическое

отклонение – 9%. Полагая, что процент выполнения плана – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность вероятности. Найти долю предприятий: а) не выполняющих план; б) выполняющих план от 110 до 150%.

5. При измерении расстояний до удаленных предметов ошибка измерения $X$ – случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним значением, равным 20 м, и средним квадратическим отклонением 40 м. Записать плотность распределения случайной величины $X$. Определить вероятность того, что измеренное расстояние отклоняется от действительного не более чем на 30 м.

6. Длина изготавливаемых станком-автоматом деталей представляет собой случайную величину $X$, имеющую нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 200 см, и среднеквадратическим отклонением – 0,2 см. Записать плотность распределения случайной величины $X$. Определить вероятность брака, если допустимые размеры детали 20 + 0,3 см.

7. Некоторая категория людей имеет средний вес 60 кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Предполагая, что вес $m$ – случайная величина, имеющая нормальное распределение, записать ее плотность распределения. Определить вероятность того, что вес случайно взятого человека отличается от среднего не более чем на 5 кг.

8. Случайная величина $X$ – диаметр шарика для подшипников, имеет нормальное распределение со средним значением, равным 5 мм, и средним квадратическим отклонением 0,05 мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от среднего больше чем на 0,1 мм. Записать плотность распределения случайной величины $X$. Найти процент шариков, которые в среднем отбраковываются.

### *5.2. Равномерное распределение.*

Непрерывная случайная величина $X$ имеет *равномерное распределение* на интервале $[a, b]$, если на этом интервале плотность распределения постоянна, а вне его равна нулю, то есть

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b;\\ 0 & x>b.\end{cases}$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b;\\ 1 & x>b.\end{cases}$$

Определим основные числовые характеристики случайной величины, имеющей равномерное распределение.

Математическое ожидание

$$M(x)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

Дисперсия равномерного распределения равна

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

***Пример 12.*** Цена деления шкалы измерительного прибора равна 1. Показания округляются до ближайшего деления шкалы. Найти функцию плотности вероятностей ошибки округления, ее математическое ожидание и дисперсию.

***Решение.*** Ошибка округления принимает значения из интервала [0; 0,5] и является случайной величиной, распределенной равномерно, так как все возможные значения внутри промежутка имеют равную вероятность. Функция плотности вероятности равномерного закона имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}=2, & a\le x\le b;\\ 0\ , & x<a \quad и \quad x>b.\end{cases}$$

В задаче имеем $a=0; b=0{,}5.$ Тогда плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{1}{0{,}5-0}=2, & 0\le x\le 0{,}5; \\ 0, & x>0{,}5. \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики.

Числовые характеристики равномерного распределения проще рассчитать, используя готовые формулы

$$M(x)=\frac{a+b}{2}, \qquad D(x)=\frac{(b-a)^2}{12},$$ то есть:

$$M(x)=\frac{0+0{,}5}{2}=0{,}25, \quad D(x)=\frac{(0{,}5-0)^2}{12}=0{,}021, \quad \sigma(x)=0{,}14.$$

**Практическое занятие**

1. Случайная величина $X$ распределена равномерно на интервале (2;8). Записать функцию плотности вероятности, функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и медиану. Найти вероятности $P(X<3)$; $P(X>5)$; $P(4<X<6)$.

2. Число дней, проведенных больным в больнице, $T$ – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Наименьшее число дней, необходимое для обследования, равно 5; наибольшее – 12. Записать плотность распределения случайной величины $T$. Найти ее математическое ожидание, дисперсию; вероятность того, что время пребывания больного в больнице: а) не превысит 7 дней; б) превысит 10 дней; в) будет в пределах от 6 до 8 дней.

3. Автобусы идут с интервалом 10 минут. Считая, что случайная величина $X$ – время ожидания автобуса имеет равномерное распределение, найти А) функции плотности и распределения, построить их графики; Б) среднее время ожидания, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания; В) вероятности того, что время ожидания автобуса будет не более 3 минут; более 4 минут; от 5 до 8 минут.

3. Поезда метрополитена идут с интервалом в 2 мин. Время ожидания поезда пассажиром $T$ – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Записать плотность распределения

этой случайной величины *T*, определить ее математическое ожидание и дисперсию, найти вероятность того, что время ожидания не превысит полторы минуты.

**Самостоятельная работа**

1. Число дней, проведенных больным в больнице, *T* – случайная величина, имеющая равномерное распределение. Наименьшее число дней, необходимое для обследования, равно трем; наибольшее – тридцати. Записать плотность распределения случайной величины *T*. Найти ее математическое ожидание, дисперсию; вероятность того, что время пребывания больного в больнице не превысит 15 дней.

2. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Определить плотность распределения случайной величины *X* – ошибки округления, имеющей равномерное распределение, ее математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что ошибка округления а) меньше, чем 0,06; б) больше, чем 0,04.

### *5.3. Показательный закон распределения.*

Непрерывную случайную величину, плотность вероятности которой определяется выражением

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda} & x\geq 0;\\ 0 \quad x<0,\end{cases}$$

называют величиной, имеющей показательное или экспоненциальное распределение.

Это распределение часто наблюдается при изучении сроков службы различных устройств, времени безотказной работы отдельных элементов, частей системы и системы в целом, при рассмотрении случайных промежутков времени между появлениями двух последовательных редких событий.

Плотность показательного распределения определяется параметром $\lambda$, который называют интенсивностью отказов. Этот термин связан с конкретной областью приложения – теорией надёжности.

Выражение интегральной функции показательного распределения можно найти, используя свойства дифференциальной функции:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0;\\ 0; \quad x<0.\end{cases}$$

Основные числовые характеристики показательного распределения.

Математическое ожидание $M(x)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(x)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma=\dfrac{1}{\lambda}$.

***Пример 13.*** Продолжительность текущего ремонта автомобилей есть случайная величина $T$ с функцией распределения $F(t)=1-e^{-0{,}17\cdot t}$. Найти функцию плотности вероятности, математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что ремонт автомобиля продлится от 5 до 10 дней.

***Решение.***

Для показательного закона распределения функция распределения имеет вид: $F(t)=(1-e^{-\lambda t})$ *при* $t\ge 0$. Плотность вероятности $f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t}\quad (t\ge 0)$.

Следовательно, плотность вероятности случайной величины $T$ – продолжительности текущего ремонта автомобиля – при заданном параметре $\lambda=0{,}17$ имеет вид $f(t)=0{,}17e^{-0{,}17t}$.

Числовые характеристики показательного распределения вычисляются по формулам $M(t)=\dfrac{1}{\lambda},\quad D(t)=\dfrac{1}{\lambda^2}\quad$ *и* $\quad\sigma(t)=\dfrac{1}{\lambda}$.

$$M(t)=\frac{1}{0{,}17}=5{,}88,\ D(t)=\frac{1}{0{,}17^2}=34{,}6 \text{ и } \sigma(t)=\sqrt{34{,}6}=5{,}88.$$

Найдем вероятность того, что ремонт автомобиля продлится от 5 до 10 дней. Она равна:

$$P(5\le T\le 10)=F(10)-F(5)=(1-e^{-0{,}17\cdot 10})-(1-e^{-0{,}17\cdot 5})=$$
$$=e^{-0{,}85}-e^{-1{,}7}=0{,}4274-0{,}1827\approx 0{,}24.$$

## Практическое занятие

1. Записать функцию плотности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$; построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вероятности $P(X<7)$; $P(X>3)$; $P(2<X<5)$.

2. Время между двумя сбоями вычислительной машины $t$ – случайная величина, имеющая показательное распределение с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию плотности вероятности данной случайной величины. Найти вероятность безотказной работы машины в течение а) менее 300 часов; б) более 500 часов.

3. Для ремонта автомобиля требуется в среднем 3 часа. Предполагая, что время $T$, необходимое для ремонта автомобиля, случайная величина, имеющая показательное распределение, записать плотность вероятности случайной величины $T$. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что время ремонта составит: а) самое большее 1,5 часа; б) от 1 до 2 часов; в) более 2,5 часов.

4. Случайная величина распределена по показательному закону с математическим ожиданием равным 3. Записать функции плотности и распределения. Найти вероятность того, что данная СВ примет положительное значение.

## Самостоятельная работа

1. Время между двумя сбоями вычислительной машины $t$ – случайная величина, имеющая показательное распределение с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию плотности вероятности данной случайной величины. Найти вероятность безотказной работы машины в течение не менее чем 300 часов.

2. Для ремонта автомобиля требуется в среднем 3 часа. Предполагая, что время $T$, необходимое для ремонта автомобиля, случайная величина, имеющая показательное распределение, записать плотность вероятности случайной величины $T$. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что время ремонта составит самое большее 2 часа.

3. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. $T$ – время ожидания

очередной машины контролером имеет показательное распределение. Найти математическое ожидание, дисперсию случайной величины $T$, если среднее время ожидания равно 0,2 часа. Найти вероятность того, что время ожидания не превысит 15 минут.

Время (в днях) продолжительности ремонта станков есть показательно распределенная случайная величина с $\lambda = 1$. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; вероятность того, что продолжительность ремонта займет от одного до двух дней.

## Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

*К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.*

## Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения раздела «Математика: теория вероятностей»

*Основная литература*

1. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 688 с. http://e.lanbook.com/book/281

2. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2010. – 479 с.

3. Блягоз, З. У. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. – Санкт-Петербург: Лань, 2018. – 224 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/103061. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

4. Ганичева, А. В. Теория вероятностей. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 144 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/91078. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

*Дополнительная литература*

1. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва: ОНИКС, 2007. – 304 с.

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.

3. Маталыцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник [Электронный ресурс]. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 592 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=477424. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

4. Гусева, Е. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Москва: Издательство «Флинта», 2016. – 220 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=83543. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

5. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник [Электронный ресурс]. – Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 472 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=453249. – Загл. с экрана. (09.06.2018)

Приложение

## Таблица 1. Значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 0,2261 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 256 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0,0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0,0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0,0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0,0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0,0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0,0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0,0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0,0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0,0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0,0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0,0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0,0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0,0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0,0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0,0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0,0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0,0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0,0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Функция $\varphi(x)$ является чётной, $\varphi(x)\approx 0$ при $x>4$.

Таблица 2. Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,45 | 0,1736 | 0,90 | 0,3159 | 1,35 | 0,4115 | 1,80 | 0,4641 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,46 | 0,1772 | 0,91 | 0,3186 | 1,36 | 0,4131 | 1,81 | 0,4649 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,47 | 0,1808 | 0,92 | 0,3212 | 1,37 | 0,4147 | 1,82 | 0,4656 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,48 | 0,1844 | 0,93 | 0,3238 | 1,38 | 0,4162 | 1,83 | 0,4664 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,49 | 0,1879 | 0,94 | 0,3264 | 1,39 | 0,4177 | 1,84 | 0,4671 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,50 | 0,1915 | 0,95 | 0,3289 | 1,40 | 0,4192 | 1,85 | 0,4678 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,51 | 0,1950 | 0,96 | 0,3315 | 1,41 | 0,4207 | 1,86 | 0,4686 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,52 | 0,1985 | 0,97 | 0,3340 | 1,42 | 0,4222 | 1,87 | 0,4693 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,53 | 0,2019 | 0,98 | 0,3365 | 1,43 | 0,4236 | 1,88 | 0,4699 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,54 | 0,2054 | 0,99 | 0,3389 | 1,44 | 0,4251 | 1,89 | 0,4706 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,55 | 0,2088 | 1,00 | 0,3413 | 1,45 | 0,4265 | 1,90 | 0,4713 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,56 | 0,2123 | 1,01 | 0,3438 | 1,46 | 0,4279 | 1,91 | 0,4719 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,57 | 0,2157 | 1,02 | 0,3461 | 1,47 | 0,4292 | 1,92 | 0,4726 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,58 | 0,2190 | 1,03 | 0,3485 | 1,48 | 0,4306 | 1,93 | 0,4732 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,59 | 0,2224 | 1,04 | 0,3508 | 1,49 | 0,4306 | 1,94 | 0,4738 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,60 | 0,2257 | 1,05 | 0,3531 | 1,50 | 0,4332 | 1,95 | 0,4744 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,61 | 0,2291 | 1,06 | 0,3554 | 1,51 | 0,4345 | 1,96 | 0,4750 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,62 | 0,2324 | 1,07 | 0,3577 | 1,52 | 0,4357 | 1,97 | 0,4756 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,63 | 0,2357 | 1,08 | 0,3599 | 1,53 | 0,4370 | 1,98 | 0,4761 |
| 0,19 | 0,753 | 0,64 | 0,2389 | 1,09 | 0,3621 | 1,54 | 0,4382 | 1,99 | 0,4767 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,65 | 0,2422 | 1,10 | 0,3643 | 1,55 | 0,4394 | 2,00 | 0,4772 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,66 | 0,2452 | 1,11 | 0,3665 | 1,56 | 0,4406 | 2,02 | 0,4783 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,67 | 0,2486 | 1,12 | 0,3686 | 1,57 | 0,4418 | 2,04 | 0,4793 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,68 | 0,2517 | 1,13 | 0,3708 | 1,58 | 0,4429 | 2,06 | 0,4803 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,69 | 0,2549 | 1,14 | 0,3729 | 1,59 | 0,4441 | 2,08 | 0,4812 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,70 | 0,2580 | 1,15 | 0,3749 | 1,60 | 0,4452 | 2,10 | 0,4821 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,71 | 0,2611 | 1,16 | 0,3770 | 1,61 | 0,4463 | 2,12 | 0,4830 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,72 | 0,2642 | 1,17 | 0,3790 | 1,62 | 0,4474 | 2,14 | 0,4838 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,73 | 0,2673 | 1,18 | 0,3810 | 1,63 | 0,4484 | 2,16 | 0,4846 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,74 | 0,2703 | 1,19 | 0,3830 | 1,64 | 0,4495 | 2,18 | 0,4854 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,75 | 0,2734 | 1,20 | 0,3849 | 1,65 | 0,4505 | 2,20 | 0,4861 |
| 0,31 | 0,1217 | 0,76 | 0,2764 | 1,21 | 0,3869 | 1,66 | 0,4515 | 2,22 | 0,4868 |
| 0,32 | 0,1255 | 0,77 | 0,2794 | 1,22 | 0,3883 | 1,67 | 0,4525 | 2,24 | 0,4875 |
| 0,33 | 0,1293 | 0,78 | 0,2823 | 1,23 | 0,3907 | 1,68 | 0,4535 | 2,26 | 0,4881 |
| 0,34 | 0,1331 | 0,79 | 0,2852 | 1,24 | 0,3925 | 1,69 | 0,4545 | 2,28 | 0,4887 |
| 0,35 | 0,1368 | 0,80 | 0,2881 | 1,25 | 0,3944 | 1,70 | 0,4554 | 2,30 | 0,4893 |
| 0,36 | 0,1406 | 0,81 | 0,2910 | 1,26 | 0,3962 | 1,71 | 0,4564 | 2,32 | 0,4898 |
| 0,37 | 0,1443 | 0,82 | 0,2930 | 1,27 | 0,3980 | 1,72 | 0,4573 | 2,34 | 0,4904 |
| 0,38 | 0,1480 | 0,83 | 0,2967 | 1,28 | 0,3997 | 1,73 | 0,4582 | 2,36 | 0,4909 |
| 0,39 | 0,1517 | 0,84 | 0,2995 | 1,29 | 0,4015 | 1,74 | 0,4591 | 2,38 | 0,4913 |
| 0,40 | 0,1554 | 0,85 | 0,3023 | 1,30 | 0,4032 | 1,75 | 0,4599 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,41 | 0,1591 | 0,86 | 0,3051 | 1,31 | 0,4049 | 1,76 | 0,4608 | 2,42 | 0,4922 |
| 0,42 | 0,1628 | 0,87 | 0,3078 | 1,32 | 0,4066 | 1,77 | 0,4616 | 2,44 | 0,4927 |
| 0,43 | 0,1664 | 0,88 | 0,3106 | 1,33 | 0,4082 | 1,78 | 0,4625 | 2,46 | 0,4931 |
| 0,44 | 0,1700 | 0,89 | 0,3133 | 1,34 | 0,4099 | 1,79 | 0,4633 | 2,48 | 0,4934 |
| 2,50 | 0,4938 | 2,64 | 0,4959 | 2,78 | 0,4973 | 2,92 | 0,4982 | 3,60 | 0,499841 |
| 2,52 | 0,4941 | 2,66 | 0,4961 | 2,80 | 0,4974 | 2,94 | 0,4984 | 3,80 | 0,499928 |
| 2,54 | 0,4945 | 2,68 | 0,4963 | 2,82 | 0,4976 | 2,96 | 0,4985 | 4,00 | 0,499968 |
| 2,56 | 0,4948 | 2,70 | 0,4965 | 2,84 | 0,4977 | 2,98 | 0,4986 | 4,50 | 0,499997 |
| 2,58 | 0,4951 | 2,72 | 0,4967 | 2,86 | 0,4979 | 3,00 | 0,4986 | | |
| 2,60 | 0,4953 | 2,74 | 0,4969 | 2,88 | 0,4980 | 3,20 | 0,4993 | | |
| 2,62 | 0,4956 | 2,76 | 0,4971 | 2,90 | 0,4981 | 3,40 | 0,4996 | | |

Функция $\Phi(x)$ является нечётной и $\Phi(x)\approx 0{,}5$ при $x\geq 0{,}5$.