МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Т. Ф. ГОРБАЧЕВА»
филиал КузГТУ в г. Прокопьевске

Кафедра естественнонаучных дисциплин

МАТЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельной работы
студентов СПО всех специальностей по темам
«Дифференциальное исчисление функций одной переменой»,
«Интегральное исчисление функций одной переменной»

Составитель: **Л. И. Мамонова**

Рассмотрены и утверждены
на заседании кафедры
Протокол № 1 от 28.08.2018 г.

Рекомендованы к изданию
учебно-методической комиссией
Протокол № 1 от 28.08.2018 г.

Электронный ресурс находится
в библиотеке филиала КузГТУ
в г. Прокопьевске

Прокопьевск 2018

Рецензент:
к. э. н., доцент кафедры естественнонаучных дисциплин
филиала КузГТУ в г. Прокопьевске
Чайковская Ирина Николаевна

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

РАЗДЕЛ 1. «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1.1. Тема «Предел функции» 5
1.1.1. Теоретические сведения 5
1.1.2. Задания для самостоятельного решения 9
1.2. Тема «Непрерывность функции, точки разрыва» 10
1.2.1. Теоретические сведения 10
1.2.2. Задания для самостоятельной работы 11
1.3. Тема: Производная функции. Свойства дифференцируемых функций. Правило Лопиталя 12
1.3.1. Теоретические сведения 12
1.3.2. Задачи для самостоятельного решения 21
1.4. Тема Исследование функции 23
1.4.1. Теоретические сведения 23
1.4.2. Задания для самостоятельного решения 30

РАЗДЕЛ 2. «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

2.1. Тема «Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл» 31
2.1.1. Теоретические сведения 31
2.1.2. Задания для самостоятельного решения 41
2.2. Тема «Применение определенного интеграла для вычисления площадей, длин и объемов фигур» 43
2.2.1. Теоретические сведения 43
2.2.2. Задания для самостоятельного решения 51
3. Варианты контрольных работ 53
Список литературы 59

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое указание предназначено для студентов среднего профессионального образования по специальности. В нем содержится теоретический материал, варианты типовых заданий по двум разделам дисциплины «Элементы высшей математики».

Разделы «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Интегральное исчисление функции одной переменной» – одни из базовых разделов дисциплины «Элементы высшей математики», на которые опираются общепрофессиональные дисциплины и дисциплины специализации. Математические науки играют огромную роль в образовании современного высококлассного специалиста в технических областях, предоставляя ему аппарат исследования, дисциплинируя, приучая к строгим логическим рассуждениям.

Данные разделы содержат в себе следующие основные темы: введение в математический анализ, предел и непрерывность функции, производная и дифференциал функции, свойства дифференцируемых функций, методы вычисления неопределенных интегралов, определенный интеграл. Цель изучаемых разделов – дать студенту представление о классических методах математического анализа и их применении к решению прикладных и конкретных технических задач; привить необходимую математическую культуру и развить технику математических вычислений.

По изучению разделов дисциплины студенты должны иметь чёткое представление об основных методах исследования свойств функций методами дифференциального и интегрального исследования. Они должны знать основные определения, теоремы и формулы математического анализа и уметь их применять к решению практических задач, в том числе, решаемых с помощью ЭВМ.

РАЗДЕЛ 1. «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1.1. Тема «Предел функции»

1.1.1. Теоретические сведения

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от Δ, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c=const).
2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x \to \infty}(1 + 1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x = x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x = x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const},\ c\neq 0,\ c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c}\to 0;\ \frac{c}{0}\to\infty;\ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty;\ c\cdot 0\to 0;\ a^{\infty}\to 0,\ \text{если}$$

$$0<a<1;\ a^{\infty}\to\infty,\ \text{если } a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\left(\frac{0}{0}\right);(0\cdot\infty);(\infty-\infty);(1^{\infty});(\infty^{0});(0^{0}).$$

Пример 1. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{10}.$

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)}=\dfrac{0}{12}=0.$

Пример 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+6}{7n-8}.$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1+\dfrac{6}{n^2})}{n^2(\dfrac{7}{n}-\dfrac{8}{n^2})}=\dfrac{1}{0}=\infty.$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right).$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n+8\right)-\left(n-1\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\dfrac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\dfrac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x}{6x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\dfrac{5\cdot 8}{6}=\dfrac{40}{6}=\dfrac{20}{3}$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$.

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$.

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1.$$

1.1.2. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n}{n+6}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n+3}{1+2n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+16}{9n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$.

Задание 2. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$; 9) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$;

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 4x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{tgx}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$.

1.2. Тема «Непрерывность функции, точки разрыва»

1.2.1. Теоретические сведения

Функция, называется *непрерывной в точке* x_0, если она:

1) определена в точке x_0;
2) имеет конечный предел при $x \to x_0$;
3) этот предел равен значению функции в этой точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция называется непрерывной, если:

1) $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \quad \Delta f = f(x_0 + x) - f(x_0)$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ непрерывна на (-∞; +∞).

Решение: $\Delta f = (3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1) - (3{x_0}^2 - 2x_0 + 1) = 3{x_0}^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3{x_0}^2 + 2x_0 - 1 = 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$; $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0}(6x_0\Delta x + 3\,\Delta x^2 - 2\Delta x) = 0$.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1–3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

1) x_0 – точка устранимого разрыва если,
   а) $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$;
   б) в точке x_0 функция не определена;

2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

$h = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ – скачок функции;

3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Пример 2. Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$а)\ y = f(x) = \begin{cases} x^2+1, x<1 \\ 0, x=1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$$

$$Решение: \lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right) = 2;\ \lim_{x\to 1+0}\left(x+1\right) = 2f(1) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad точка \quad устранимого \quad разрыва$$

$$б)\ y = f(x) = \begin{cases} x^2, x\le 1 \\ x-2, x>1 \end{cases}$$

$$Решение: \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1 \neq \lim_{x\to 1+0}\left(x-2\right) = -1$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad точка \quad разрыва \quad I \quad рода$$

$$h = -1-1 = -2$$

$$в)\ y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$Решение: \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad точка \quad разрыва \quad II \quad рода$$

1.2.2. Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

$а)\ f(x) = x+9;$ $б)\ f(x) = x^3+8;$

$в)\ f(x) = 2x^2+6x-5;$ $г)\ f(x) = 10x^2-12x.$

Задание 2.Найти точки разрыва и установить их тип

$$а)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -e^{-x}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ e^{x}, x > 0 \end{cases}; \qquad б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\sin x}{x};$$

$$в)\ y = f(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{x+3}}; \qquad г)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\cos x}{x}.$$

1.3. Тема: Производная функции.

Свойства дифференцируемых функций. Правило Лопиталя

1.3.1. Теоретические сведения

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.y'_x\right|_{x_0},\ y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ – угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

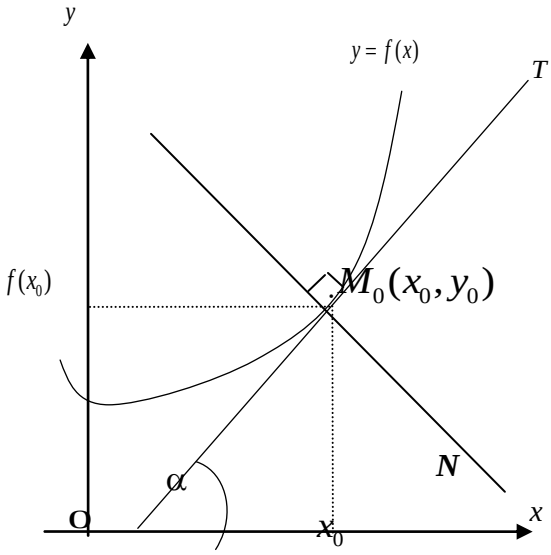


Рисунок 1.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{3}$$

Правила дифференцирования.

Таблица 1

№ пп	$U=u(x)$, $V=V(x)$ – дифференцируемые функции	№ пп	$U=u(x)$, $V=V(x)$ – дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u',\quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ (v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x},\ (y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2},\ \begin{matrix} c = \text{const} \\ (v(x) \neq 0) \end{matrix}$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций.

Таблица 2

№ пп	c=const, x – независимая переменная, $u= u(x)$ – дифференцируемая функция.		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$	**14**	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \quad (u > 0)$	**15**	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;$$

$$в)\ u = \operatorname{ctg}^3 \frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}.$$

Решение:

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4 / x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} -$$

$$-4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' = ((e^t)' -$$

$$-2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

$$в)\ u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' =$$

$$= 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg} 2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Решение:

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2-3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' =$

$$= \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}; \qquad y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим:

$y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ – уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$ – уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$

Решение:

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x + \cos 2x;$

б) $u = 3 + e^{-x};$

в) $s = \ln 3t.$

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)'dt = \dfrac{(3t)'}{3t}dt = \dfrac{3}{3t}dt = \dfrac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x.$

Решение: $y'' = (y')',$ поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} =$$

$$= 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' =$$

$$= 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием.

Решение:

$$y = x^x,\ \ln y = \ln x^x,\ \ln y = x \cdot \ln x,\ \left(\ln y\right)' = \left(x \cdot \ln x\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x},\ \frac{y'}{y} = \ln x + 1,\ y' = y\left(\ln x + 1\right),$$

$$y' = x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$а)\ \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6};\ б)\ \lim_{x \to -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14};$$

Решение:

а) Подставляя в функцию вместо *x* предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x \to \infty}(4x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \to \infty} x^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = \infty \cdot 4 = \infty,$$

т. к. $\frac{2}{x^2} \to 0,\ \frac{3}{x^3} \to 0.$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6) = \infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2} = \lim_{x\to\infty}12x = \infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14} = \lim\limits_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'} = \lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5} = \lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5} = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9}.$$

Пример 8. Продифференцировать функцию: $y = \arcsin^5(\cos(2-4x))$.

Решение:

Находим производную данной функции по правилам дифференцирования сложной функции:

$$y' = 5\arcsin^4(\cos(2-4x))\cdot(\arcsin(\cos(2-4)))' = 5\arcsin^4(\cos(2-4x))\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(2-4x)}}\cdot(\cos(2-4x))' = \frac{5\arcsin^4(\cos(2-4x))}{\sin(2-4x)}\cdot(-\sin(2-4x))\cdot(-4) =$$

$$= 20\arcsin^4(\cos(2-4x))$$

Пример 9. Найти производную функции, заданной неявно: $x^3 + x^2y + y^2 = 0$.

*Решение: д*ифференцируем данную функцию по *x:*

$$y'_x = 3x^2 + 2xy + x^2 y' + 2yy',$$

$$\text{откуда } y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$$

Пример 8. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 1 - 2\cos t \end{cases}$.

Решение: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{(1-2\cos t)'}{(t+\sin t)'} = \dfrac{2\sin t}{1+\cos t}$.

1.3.2. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти производные функций:

1. а) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$; б) $y = \dfrac{x^2 + \cos x}{x^2 \cos x}$.
2. а) $y = e^{\sqrt[3]{x}} \sin 3x$; б) $y = \dfrac{x - \sin x}{x \cos x}$.
3. а) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$; б) $y = e^x(\cos x^2 - \sin x^2)$.
4. а) $y = \dfrac{x}{2} - e^{x^2}$; б) $y = \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x}$.
5. а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$; б) $y = \dfrac{x - \cos x}{x + \sin x}$.
6. а) $y = \dfrac{\ln x}{x^6}$; б) $y = \dfrac{x \sin x}{x + \sin x}$.
7. а) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; б) $y = \dfrac{x + \cos x}{x \sin x}$.
8. а) $y = e^x \operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{e^x}$; б) $y = \dfrac{x^2 + \sin x}{x + \cos x}$.

9. а) $y = \ln(e^x \cos x + e^x \sin x)$; б) $y = 2^{x \operatorname{tg} x}$

10. а) $y = x^2 \log_3 x + 3^x$; б) $y = \dfrac{x \cos x}{x - \sin x}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\dfrac{x^2-3}{x}$, $x_0 = 1$; 2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0 = 2$; 3) $\dfrac{x^2+3x}{3}$, $x_0 = -1$;

4) $\sqrt{x}+2x$, $x_0 = 9$; 5) $\dfrac{x^2}{x-2}$, $x_0 = 1$; 6) $\sqrt{1+3x}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции$y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x = c\operatorname{tg} t \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

Задание 4. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$; 2) $y = \cos x - \ln x$;

3) $y = \sin x + x^4$; 4) $y = x^2 + \sin x$;

5) $y = x + \ln x$; 6) $y = 3e^x + 2x$.

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием.

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$; 2) $y = (\cos x)^x$; 3) $y = x^{\ln x}$;

4) $y = (\sin x)^{\ln x}$; 5) $y = x^{\cos x}$; 6) $y = (tgx)^{\ln x}$.

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg} x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{1-3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$.

1.4. Тема Исследование функции

1.4.1. Теоретические сведения

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in$(a;b), в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

Теорема Коши. Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале (a;b), причем $\varphi'(x)\neq 0$ для $x\in$ (a;b), то найдется хотя бы одна точка $c\in$(a;b) такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in$(a;b) такая, что выполняется равенство $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Следствие 1. Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

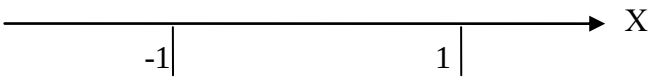
Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример 1. Исследовать функцию $f(x)$=x^3-3x-4 на монотонность.

Решение:

$x \in R = (-\infty;+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1) \times (x+1)$



$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-1;1]$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ и убывает при $x \in [-1;1]$.

Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f(x)$=0.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ - окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a; b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку, x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота y=Rx+b, то R и b находится по формуле: $R = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - Rx)$.

Если R=0, то y=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности:

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример 2. Найти область определения функции $y = \frac{x}{2\cos x + 1}$.

Решение:

Данная функция определена для всех *x*, не обращающих в нуль знаменатель, т.е. не являющихся корнями уравнения $2\cos x + 1 = 0$. Это все числа вида $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Таким образом, область определения *D(y)* - вся числовая прямая, кроме точек $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \frac{x}{1 - x^2}$ и построить ее график.

Решение:

1. $x \in (-\infty;-1),(-1;1),(1+\infty)$;

2. $x = 0, y(0) = 0$;

Точка (0;0) - точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (y>0) в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$.

4. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$. Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

5. Прямые x = 1 и x = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (\frac{x}{1-x^2} - 0 \times x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение y=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая y=0 является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

6. $y' = (\frac{x}{1-x^2})' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как y′>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

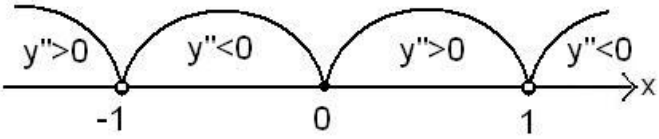
7. Т.к. $y' = \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

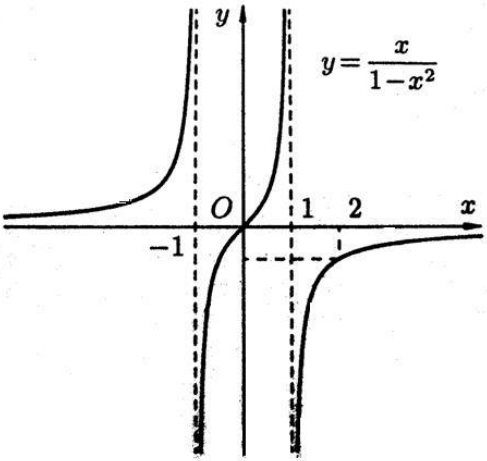
8. Найдем y″

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.



Пример 3. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Решение:

Функция определена и непрерывна в интервале (0; +∞). В граничной точке $x = 0$ области определения функция имеет бесконечный разрыв, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

Так как в точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой. Найдем уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ (если она существует).

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0;$$

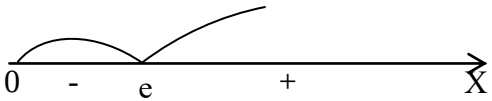
$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(При нахождении пределов воспользовались правилом Лопиталя).

Итак, $k=b=0$ и уравнение асимптоты $y=0$. Таким образом, график имеет в качестве асимптот оси координат.

Найдем производную функции и критические точки:

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Стационарная критическая точка: $x=e$. Исследуем знак производной на интервалах (0; e) и (e;∞).



Составим таблицу:

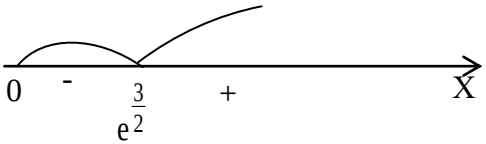
x	(0;e)	e	(e;+∞)
y`	+	0	-
y	возрастает	max	убывает

Экстремум функции: $y_{\max}=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$.

Найдем вторую производную и значения x, при которых график может иметь точку перегиба:

$$y''=\frac{2\ln x-3}{x^3},\quad y''=0 \text{ при } x=e^{\frac{3}{2}}.$$

Определим знак второй производной в интервалах $(0;e^{\frac{3}{2}})$ и $(e^{\frac{3}{2}};+\infty)$:

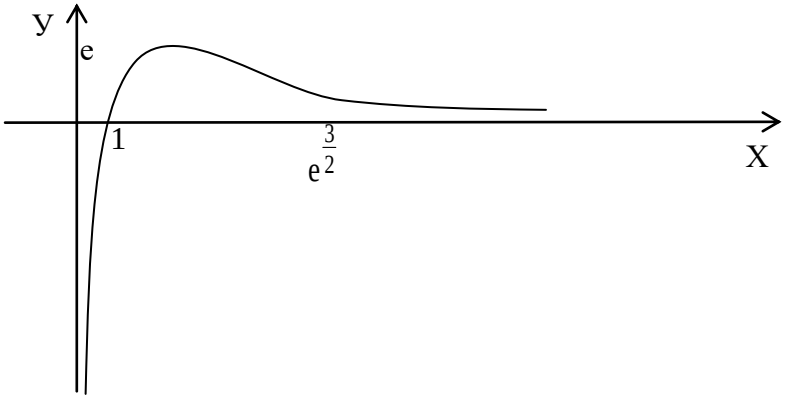


Составим таблицу:

x	$(0;e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}48$	$(e^{\frac{3}{2}};\infty)$
y``	-	0	+
график	выпуклый	точка перегиба	вогнутый

$y(e^{\frac{3}{2}})=3/(2e^{\frac{3}{2}}) \approx 0.33$

График пересекает ось абсцисс в точке (1;0). Точек пересечения с осью ординат нет. Строим эскиз графика функции:



1.4.2. Задания для самостоятельного решения

Исследовать функцию и построить график функции

1) $y = x^3 - 3x;$

2) $y = \frac{x^3}{3} + x^2;$

3) $y = x + 2\sqrt{-x};$

4) $y = \frac{6\sqrt{x}}{x+2};$

5) $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$;

6) $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$;

7) $y=12x-x^3$;

8) $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$;

9) $y=3x-x^2$;

10) $y=x\sqrt{-x+1}$;

11) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$;

12) $y=-\sqrt{2x-1}$;

13) $y=\sqrt[3]{8x-1}+1$;

14) $y=2-\frac{3}{x+1}$;

15) $y=\frac{x+5}{x+3}$;

16) $y=x(x-1)^{\frac{2}{3}}$;

17) $y=\frac{x}{x^2-4}$;

18) $y=\frac{(x-2)^3}{(x-2)^2-4}$;

19) $y=\frac{(x+3)^3}{(x+3)^2-9}$;

20) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

23) $y=\frac{1}{x^3}$;

24) $y=x^2+\frac{1}{x}$.

РАЗДЕЛ 2. «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

2.1. Тема «Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл»

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

2.1.1. Теоретические сведения

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется

первообразной для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — const..

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, $C-\text{const}$.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);\ \ d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x)+C;$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица 3

Таблица основных интегралов

1. $\int 0\,du = C; \quad C = \text{const};$	2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$	3а. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C;$	5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$	7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$	9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$	11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C;$	13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C;$	15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C;$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C;$	17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C;$
18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C.$	

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx;$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение:

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы } 12,4,3\end{array}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы} \\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов} \end{array} \right\} = \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}} + 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} +$$

$$+4x - \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3\frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3\frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{1}{2}x^2 + C \right)' = \frac{5}{\sqrt{22}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x \right)' +$$

$$+ \frac{3}{\ln 5} \left(5^x\right)' + 4x' - \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + C' = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1} \\ \text{таблицы производных} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{22}} \frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}} x \right)'}{1 + \frac{11}{2}x^2} + \frac{3}{\ln 5} \cdot 5^x \ln 5 + 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} 2x^{2-1} = \frac{5}{\sqrt{22}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}} +$$

$$+3 \cdot 5^x + 4 - x = \frac{5}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}} \frac{\sqrt{11} \cdot 2}{\sqrt{2}\left(2 + 11x^2\right)} + 3 \cdot 5^x + \frac{(4-x)(4+x)}{4+x} =$$

$$= \frac{5}{2+11x^2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16 - x^2}{4+x} \quad \text{— верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt = F(t) + C,$ то $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C,$ где $\psi(x)$ – функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int \cos 4x dx; \quad б)\ \int e^{9x+1}dx; \quad в)\int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 4

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1,2,\ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

Продолжение таблицы 4

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \dfrac{dx}{x}$	
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to$ $\to dU = \dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU =$ $= -\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\, P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \to dU =$ $= \dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx \to dU =$ $= -\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,\ldots$		

$P_n(x)$ - многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

$$а)\int(3x-1)\sin 2xdx;\qquad б)\int(1+2x)\ln xdx.$$

Решение:

$$а)\int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{matrix}U=3x-1\to dU=3dx\\ dV=\sin 2xdx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{matrix}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{matrix}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),\qquad(5)$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

$$1)\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;\ 2)\int_a^a f(x)dx=0;$$

$$3)\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

$$4)\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx;$$

$$5)\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx,\ C-\text{const};$$

6) Если $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx;$

7) Если $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a,b]$, то $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dx, \qquad (6)$$

где $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$, $t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU, \qquad (7)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$

Решение: $\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^3 =$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) =$$

$$\left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) = (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 =$$

$$= -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

2.1.2. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x}\right)dx; \quad \int\left(\frac{5}{5x^2+5} + 7^x - \frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx;$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \quad \int\left(\frac{2}{2x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2}\right)dx;$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx;$ $\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx;$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx;$ $\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx;$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx;$ $\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx;$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx;$ $\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx;$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x};$ $\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}};$ $\int e^{1-3x}\,dx;$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx;$ $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx;$ $\int e^{6x+5}\,dx;$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx;$ $\int\sin\frac{x}{2}dx;$ $\int\frac{dx}{5x+3};$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx;$ $\int\cos 2x\,dx;$ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx;$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x};$ $\int\sin 2x\,dx;$ $\int 3^{7x-1}\,dx;$

6) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$ $\int\sin(2-3x)dx;$ $\int\frac{dx}{e^{3x}}.$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int(7x-1)\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int(6-5x)e^x\,dx$ $\int(7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int (1+2x)\cos x\,dx$ $\int \arcsin x\,dx$

5) $\int (8x-1)\sin 5x\,dx$ $\int (6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^{x}\,dx$ $\int (3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_{1}^{2}\left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^{3}\left(3x^2+6x-2\right)dx$

3) $\int_{1}^{3}\left(x^2-16x+3\right)dx$ 4) $\int_{0}^{8}(21x-19)dx$

5) $\int_{-4}^{0}\left(x^3+8\right)dx$ 6) $\int_{10}^{13}(2x+7)dx$

2.2. Тема «Применение определенного интеграла для вычисления площадей, длин и объемов фигур»

2.2.1. Теоретические сведения

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат.

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $f_2(x)\geq f_1(x)$ для всех $x\in[a,b]$, и прямыми $x=a$, $x=b$,то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

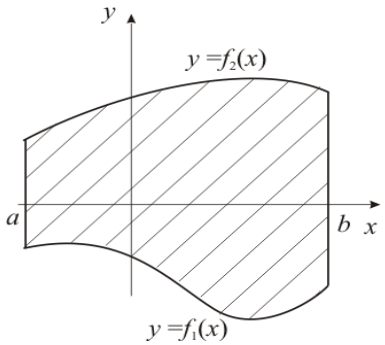


Рисунок 2.

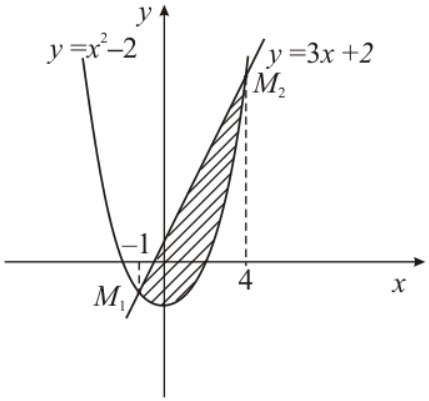


Рисунок 3.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

Решение: Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например (0; 2) и (-1; -1).

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \quad y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1, -1)$,

$M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2, \quad f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{4} = \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) =$$

$$= 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически.

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$,

$b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt \right|. \qquad (9)$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$$x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение: Для построения фигуры составим таблицу значений координат (*x*, *y*) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Таблица 5

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

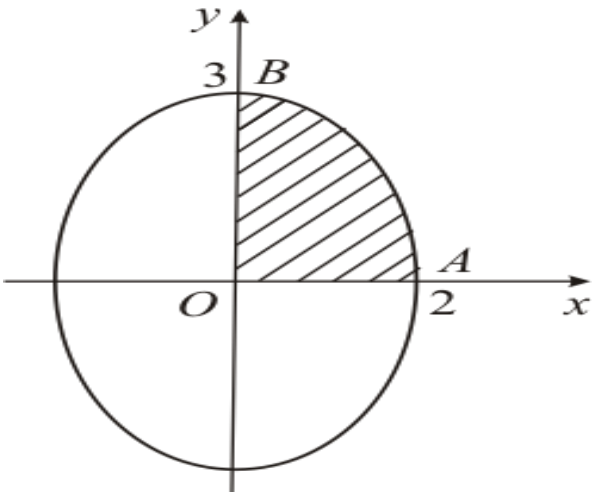


Рисунок 4.

Нанесем точки (*x*, *y*) на координатную плоскость *XOY* и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, со-

ответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями *a* и *b*). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей *OX* и *OY*, найдем её площадь *S*, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции *AOB*. Согласно формуле (9) получим:

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\left(2\cos t\right)' dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt\right| = \left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{array}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right) dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2t\right) dt\right| = 4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850 \text{ (кв. ед.)}.$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

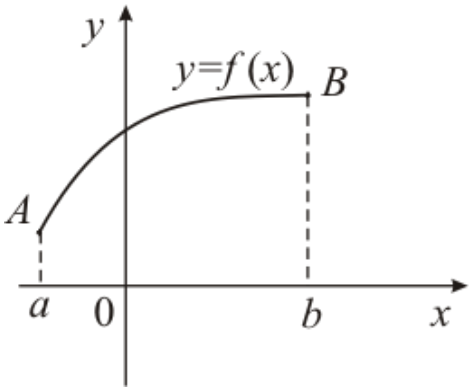


Рисунок 5.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a,b]$, то длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 4) этой крикривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (10)$$

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги $\overset{\frown}{AB}$, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (11)$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$; б)

$$x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение:

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10). Найдем y': $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (10):

$$l_{\overset{\frown}{AB}}=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\left|\begin{array}{l}t=1+\dfrac{9x}{4},dt=\dfrac{9}{4}dx,dx=\dfrac{4}{9}dt,\\ x=0\to t=1,\\ x=1\to t=1+\dfrac{9}{4}=\dfrac{13}{4}.\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{9}\int_1^{13/4}t^{\frac{1}{2}}dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=\frac{4}{9}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{13/4}=\frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)\approx 1{,}440\ \left(\text{единиц длины}\right).$$

б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11).Найдем $x'(t),\ y'(t)$:

$x'(t)=-2\sin t+2\sin 2t,\ y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$ и подставим в (11):

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-2\sin t + 2\sin 2t\right)^2 + \left(2\cos t - 2\cos 2t\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t - 8\sin t \sin 2t + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 t - 8\cos t \cos 2t + 4\cos^2 2t}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 4\left(\sin^2 2t + \cos^2 2t\right) - 8\left(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t\right)}\, dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем тригонометрические формулы} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ и } \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{8}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \end{array} \right\} = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8\left(\cos\pi - \cos 0\right) == -8\left(-1 - 1\right) = 16 \left(\text{единиц длины}\right).$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *OX* и прямыми $x = a,\ x = b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx. \qquad (12)$$

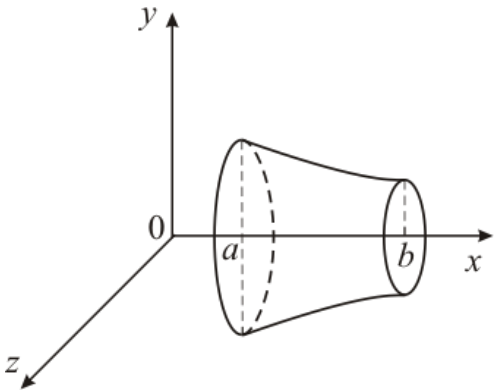


Рисунок 6.

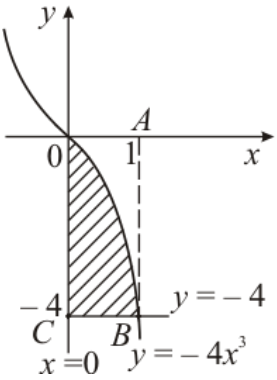


Рисунок 7.

Пример 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3,\ x=0,\ y=-4.$

Решение: Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V=V_1-V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2:

$$V_1=\pi\int_0^1(-4)^2\,dx=\pi 16x\Big|_0^1=16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2=\pi\int_0^1\left(-4x^3\right)^2dx=16\pi\int_0^1x^6dx=16\pi\frac{x^7}{7}=\frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V=V_1-V_2=16\pi-\frac{16\pi}{7}=\frac{96}{7}\pi\approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

2.2.2. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$ 2) $y = x^3,\ \ y = 8,\ \ x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\ \ \ y = 3x + 6$ 4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ \ y = 2 - x^2$ 6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2,\ \ \ y = t(t-1),\ \ 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1,\ \ y = t^3 - t,\ \ 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t,\ \ \ y = \cos t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t,\ \ y = (t-1)(3-t),\ \ 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t,\ \ \ y = 1 - \sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) $y = 1 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

2) $x = t^2 - 1,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1$

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 1,\ \ \ 0 \le x \le 1$

4) $x = t^2 - 1,\ \ \ y = \dfrac{t}{3} - t^3,\ \ 1 \le t \le 2$

5) $y = x^{\frac{2}{3}},\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

6) $x = t^3 - 4,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0,\ \ \ y = 1$

2) $x^2 + y = 0, \quad y = -1$

3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$

4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$

5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$

6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

3. Варианты контрольных работ

Ниже предлагаются варианты заданий для контрольных работ. Вариант контрольной работы определяется номером по списку журнала. Затем, определив номер своего варианта, нужно из каждого задания контрольной работы выбирать задачу с соответствующим номером.

Таблица 6

Номер заданий, контрольной работы	**Вариант работы**
1.1, 2.2, 3.5, 4.10,5.8,6.4	1
1.2, 2.3, 3.6, 4.9,5.9,6.5	2
1.3, 2.4, 3.7, 4.8,5.10,6.6	3
1.4, 2.5, 3.8, 4.7,5.1,6.7	4
1.5,2.6,3.9, 4.6,5.2,6.8	5
1.6, 2.7, 3.10, 4.5,5.3,6.9	6
1.7,2.8, 3.4, 4.4,5.4,6.10	7
1.8, 2.9, 3.3, 4.3,5.5,6.1	8
1.9, 2.10,3.2, 4.2,5.6,6.2	9
1.10, 2.1, 3.1, 4.1,5.7,6.3	10

Задания контрольные работы для студентов

Задание 1. Найти следующие пределы:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+7}{4x^2+7x-9}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+6x^2-7}{2x^3+7}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+6x+8}{3x^3+6x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{tg4x}{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x-1}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+5}{4x^2+x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$;

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+3}{4x^3-5x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+3}{4x^3-3x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sin^2 8x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{2x+3}}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x+4)}{16-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^x$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^4 4x}{3x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-x+1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

Задание 2. Продифференцируйте функции:

1. а) $y = e^x\operatorname{tg}x+\dfrac{\cos x}{e^x}$; б) $x = \ln(xy)$; в) $\begin{cases} x = \cos t\sqrt{2\cos 2t} \\ y = \sin t\sqrt{2\cos 2t} \end{cases}$;

2. а) $y = \ln(e^x\cos x + e^x\sin x)$; б) $x^4+y^4 = x^2y^2$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{2}{2t^2+t} \end{cases}$;

3. а) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$; б) $x = e^{x+y}$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$;

4. а) $y = \ln \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; б) $\cos(xy)=x$; в) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$;

5. а) $y = x^2 \log_3 x + 3^x$; б) $x^3+y^3-3xy=0$; в) $\begin{cases} x = t(1-\sin t) \\ y = t \cos t \end{cases}$;

6. а) $y = 2^{\sqrt[5]{x}} \sin^3 x$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{1}{t^2-1} \end{cases}$;

7. а) $y = \dfrac{\ln x}{x^6}$; б) $y^x = x^y$; в) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$;

8. а) $y = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$; б) $x^3+y^3-6xy=0$; в) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \\ y = \sqrt{1-\sqrt{t}} \end{cases}$;

9. а) $y = \dfrac{x}{2} - e^{x^2}$; б) $y=2x+\operatorname{arctg} y$; в) $\begin{cases} x = e^{2t} \cos^2 t \\ y = e^{2t} \sin^2 t \end{cases}$;

10. а) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2}$; б) $x^3+x^2y+y^2=0$; в) $\begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

Задание 3. Найти область определения функции:

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-14}}$;
2. $y = \dfrac{2x}{\operatorname{tg} x}$;
3. $y = \dfrac{6x^2}{\cos x - 1}$;
4. $y = \dfrac{5x^2}{\sin x - 1}$;
5. $y = \dfrac{5x}{1-\cos x}$;
6. $y = \dfrac{2x}{\operatorname{tg} x + 1}$;

7. $y = \frac{3x}{\cos x + 1}$; 8. $y = \frac{6}{1 + 2\sin x}$;

9. $y = \frac{2x^2}{1 - 2\sin x}$; 10. $y = \frac{x}{2\cos x - 1}$.

Задание 4. Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график:

1. $y = \ln \sin x$; 2. $y = \log_2 \frac{1}{x} - x$;

3. $y = \sqrt{x^2 - x}$; 4. $y = \cos^3 x$;

5. $y = \ln(x^2 - 1)$; 6. $y = 3|\sin x|$;

7. $y = x^3 + |x|$; 8. $y = 2x^2$;

9. $y = \frac{1}{3}(x-1)e^{3x+1}$; 10. $y = \frac{1}{x}\ln x$.

Задание 5. Найти интегралы:

1. а) $\int \frac{x dx}{2^{x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^3}}$; в) $\int \cos^4 x dx$;

2. а) $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x - 1}} dx$; в) $\int \sin^2 3x dx$;

3. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}$; в) $\int \sin^4 dx$;

4. а) $\int \frac{3 - 2x}{\sqrt{4 - 2x^2}} dx$; б) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$;

5. а) $\int \frac{x^2 dx}{4x^6 + 1}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$; в) $\int \sin x \cos 2x dx$;

6. а) $\int \frac{6^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2(x - 4)}$; в) $\int \cos^6 x dx$;

7. а) $\int \frac{x^2 dx}{4x^6+1}$; б) $\int e^{-(2x+3)} x dx$; в) $\int \sin^4 2x dx$;

8. а) $\int \frac{x dx}{3x^2+1}$; б) $\int e^{-\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$;

9. а) $\int x^2 e^{x^3} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$; в) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$;

10. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-4x^4}}$; б) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$; в) $\int \cos^2 4x dx$.

Задание 6. Вычислить несобственный интеграл, или установить его расходимость:

1. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 2. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; 3. $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}$; 4. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3-x^2}$;

5. $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^3+1}$; 6. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$; 7. $\int_0^e x \ln x dx$; 8. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^3}}$;

9. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; 10. $\int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2-8}$;

Список литературы

1. Бугров Я. С., Никольский С. М.: Дифференциальное и интегральное исчисление. М. Высшая школа, 1993.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М.: Высшая математика (задачник). М. Высшая школа, 1993.

3. Башмаков М. И. «Математика», ОИЦ «Академия», 2014г.

4. Башмаков М. И. «Математика. Задачник», ОИЦ «Академия», 2014г.

5. Яковлев Г. Н. (под ред.) Математика. В 2-х книгах Учебник, ИД «Оникс», 2011г.

6. Выгодский М. Я.: Справочник по высшей математике. М. Просвещение, 2002.

7. Ильин В. А, Поздняк Э. Г.: Основы математического анализа. М. Высшая школа, 1994.

8. Кудрявцев Л. Д.: Курс математического анализа. М. Высшая школа, 1998.

9. Кудрявцев Л. Д.: и др. Сборник задач по математическому анализу (ч.1 и 2). М. Высшая школа, 1998.

10. Миносцев В. Б.: Курс высшей математики. М. РИЦ МГИУ, 2001.

11. Щипачёв В. С.: Высшая математика (для экономических специальностей). М. Высшая школа, 2001.

Составитель
Любовь Ивановна Мамонова

Рецензент
Чайковская Ирина Николаевна

МАТЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельной работы студентов СПО всех специальностей по темам «Дифференциальное исчисление функций одной переменой», «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Электронный ресурс

Сверстано в филиале КузГТУ в г. Прокопьевске.
653039, г. Прокопьевск, ул. Ноградская, 19а.

Заказ 330.