

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«КУЗБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Т. Ф. ГОРБАЧЕВА»
филиал КузГТУ в г. Прокопьевске

Кафедра естественнонаучных дисциплин

ЕН.01. МАТЕМАТИКА

Методические указания для выполнения
практической работы студентов СПО

Составитель: **С. В. Микова**

Рассмотрены и утверждены
на заседании кафедры
Протокол № 9 от 26.06.2020 г.

Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
Протокол № 5 от 26.06.2020 г.

Электронная копия находится
в библиотеке филиала КузГТУ
в г. Прокопьевске

Прокопьевск 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Требования к оформлению работ	5
Практическая работа № 1. Предел последовательности и предел функции. Замечательные пределы.	6
Практическая работа № 2. Вычисление производной функции, нахождение касательной к графику функций.	15
Практическая работа № 3. Вычисление дифференциала функций, нахождение дифференциала первого и второго порядка. Механический смысл производной.	19
Практическая работа № 4. Нахождение промежутков возрастания (убывания) и точек экстремума. Исследование функции.	22
Практическая работа № 5. Интеграл. Методы интегрирования. Неопределенный интеграл.	28
Практическая работа № 6. Вычисление определенного интеграла.	36
Практическая работа № 7. Вычисление площади фигур с помощью определенного интеграла.	41
Практическая работа № 8. Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.	46
Практическая работа № 9. Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения.	54
Практическая работа № 10. Комплексные числа и действия с ними.	62
Практическая работа № 11. Решение задач на вероятность событий.	69
Список литературы	78

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания для выполнения практической работы по дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся среднего профессионального образования».

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях, а также для получения практических умений. Практические задания выполняются студентом фронтально самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на лекционных занятиях, а также с использованием необходимых пояснений, приведенных в методическом указании. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием, используя конспект лекций или предложенную литературу.

Практические задания разработаны в соответствии с рабочей программой. В результате выполнения практических занятий обучающийся должен:

уметь:

- использовать методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- решать основные прикладные задачи численными методами.

знать:

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел,
- теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

К задачам практических занятий, как части изучения дисциплины, относится формирование общих и профессиональных компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды, результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Планировать ведение горных работ и оформлять техническую документацию.

ПК 1.4. Обеспечивать выполнение плановых показателей.

ПК 3.3. Анализировать процесс и результаты деятельности персонала участка.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в письменном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

Целями проведения практических занятий являются:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины «Математика»;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

Ход выполнения практической работы

Практические работы необходимо выполнять в рабочих тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Выполнить практические задания.
3. Сдать преподавателю тетрадь для проверки.

Критерии оценивания практических работ

Отметка «5» ставиться, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- выполнено 75-90 % заданий;
- либо работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являются специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставиться, если:

- выполнено 51-75 % заданий;
- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- выполнено менее 50 % заданий;
- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: Предел последовательности и предел функции. Замечательные пределы.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число a называется пределом последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$

$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c = \text{const}).$

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число $e = 2,718\dots$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Пример 1. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}.$

$$\text{Решение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{6}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(10 - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{1}{10}.$$

Пример 2. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1}.$

$$\text{Решение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(12 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{0}{12} = 0.$$

Пример 3. Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8}.$

$$\text{Решение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{6}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{7}{n} - \frac{8}{n^2} \right)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})$.

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1}) =$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left((\sqrt{2n+8})^2 - (\sqrt{n-1})^2\right)}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+8) - (n-1)}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+8-n+1}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1 + \frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{0} = \infty. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x \cdot 8}{6 \cdot 8x} = \frac{5 \cdot 8}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(1+5x)}{5x} = 5.$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x} \cdot 5x \cdot \frac{1}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(5x \cdot \frac{1}{3x} \right)} = e^{\frac{5}{3}}$.

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4}{x^2+1} \right)^x$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4}{x^2+1} \right)^x \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1} \right)^x =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+1}{3}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+1}{3} \cdot \frac{3}{x^2+1} \cdot x} \right)^x =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2+1} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2+1}} = e^0 = 1.$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x = x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x = x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то, учитывая свойства б. б. и б. м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \rightarrow 0; \quad \frac{c}{0} \rightarrow \infty; \quad \frac{\infty}{c} \rightarrow \infty; \quad c \cdot \infty \rightarrow \infty; \quad c \cdot 0 \rightarrow 0; \quad a^\infty \rightarrow 0,$$

если $0 < a < 1$; $a^\infty \rightarrow \infty$, если $a > 1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty} \right); \quad \left(\frac{0}{0} \right); \quad (0 \cdot \infty); \quad (\infty - \infty); \quad (1^\infty); \quad (\infty^0); \quad (0^0).$$

Задания по теме «Пределы»

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5}; & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n}{n+6}; & 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+3}{1+2n}; \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+16}{9n}; & 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}; & 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(n-1)^2 - (n+1)^2}; \\ 7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n+2}; & 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 16n}; & 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-7} - \sqrt{n+2}). \end{array}$$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 3x^2 + x}; & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x}; & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x} - 3)}{\sqrt{x} - 2}; & 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}; & 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{x+2}; & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 15x^2 + x}{18x^2 + 15x}; & 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x-7} - \sqrt{x+2})}{x-2}; \end{array}$$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2} \right)^{x^2 + 1}; & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x; & 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x^2)^{x^3 \cdot \frac{1}{x}}; & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 4x}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}; & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1 - 2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}; & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\sin x \cdot x^2}. \end{array}$$

Содержание практической работы по теме «Пределы»

Вариант 1

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5} \right)^{x+3}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)^3}{3x^2+3}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{3x^2}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{x} \right)^x$.

Вариант 2

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5x+7}{3x^2-4x-1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2-x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2-3x}{9x^3-6x+5}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-5} - \sqrt{x})$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{7}{2}x}{x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$.

Вариант 3

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x-7}{7x^2-8}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{9x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8+x}-\sqrt{8}}{x}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos \frac{5}{2}x}{x^2}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^x$.

Вариант 4

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3}{4-5x^3};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x-3)^2}{8x^2-7};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^3-27}{x};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1-\cos^2 x)}{7x^2};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}.$

Вариант 5

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt{x}};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+2}.$

Вариант 6

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-8}{x^4+3x^2+5};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{7x};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x-1};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{3x}{5}\right)}{x^2};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}.$

Вариант 7

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 1}{8x^3 + 3};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x+1};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-2)^2}{9x^3 + 5x^2 - 8};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{11x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)^x.$

Вариант 8

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^5 - 5x^2 + 5}{5x^5 + 2x^2 - 1};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \operatorname{ctg} 3x;$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^x;$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^2 - 7}{x(x-1)^3};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-4} - 2}{x};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \operatorname{tg} x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x}.$

Вариант 9

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{x^2 + \sqrt[3]{x}};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9+x}{x}\right)^{2x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2}{x^2 + 8x + 5};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt{x}-2};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3x^2};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{5x}.$

Вариант 10

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^2}{3x^2-7};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-x}{x-1};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2 \sin 5x};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{5x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+2}\right)^{x+1}.$

Вариант 11

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2-9x+3}{x^3-1};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{4}}{x^3};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{7x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2};$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$

Вариант 12

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4-3x^2+4x-3}{2x^4+1};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x;$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 6x)^{\frac{x}{2}};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^4-2}{2x^4+\sqrt{x}};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5x-14}{x^2-4};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^5 x}{x \cdot \sin 2x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x}.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: Вычисление производной функции, нахождение касательной к графику функций.

Цель: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, обратных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная и обратная функция.

При выполнении работы необходимо научиться:

- вычислять производные, применяя правила дифференцирования;
- находить касательную к графику функции.

Теоретический материал и примеры нахождения производной функции:

Определение: Производной функции $f(x)$ ($f'(x)$) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$
$c - const$	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования

Если у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные, то

1. $C' = 0$
2. $(u + v)' = u' + v'$
3. $(uv)' = u'v + v'u$
4. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где $C = const$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
6. Производная сложной функции:
 $f'(g(x)) = f'(g) \cdot g'(x)$

Пример 1. Найти значение производной функции: $y = \frac{3x-5}{4e^x-3}$.

Решение: функция представляет собой частное двух выражений:

$$u = 3x - 5, v = 4e^x - 3.$$

По формуле 5:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x-5}{4e^x-3}\right)' = \frac{(3x-5)' \cdot (4e^x-3) - (4e^x-3)' \cdot (3x-5)}{(4e^x-3)^2} = \\ &= \frac{3(4e^x-3) - 4e^x(3x-5)}{(4e^x-3)^2} \end{aligned}$$

Пример 2. $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_a = \frac{\pi}{12}$.

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции (формула 6):

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Пример 3.

Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ то $y' = \left(3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$

Пример 4. $y = x^3 - 3x^2 + 5x = 2$. Найдем $y'(-1)$.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

Геометрический смысл производной

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, – угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке
 $(K = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0))$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 5. Составить уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение: Используем уравнения касательной:

$$1) y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$$

$$2) y'(x) = ((x^2 - 3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 3)' = \\ = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = 2.$$

Подставим $x_0, y(x_0), y'(x_0)$ в уравнения и получим:
 $y = 1 + 2(x - 2)$, или $2x - y - 3 = 0$ – уравнение касательной.

Задания по теме «Производная.

Геометрический смысл производной»

Задание 1. Найти производную функции y :

а) $y = 6x^5 - 3 \cos x + 8x - 9$;

б) $y = e^x(5x + 7)$;

в) $y = \frac{\ln x}{\sin x}$;

г) $y = 3^{x^3}$;

д) $y = \sqrt{\sin 2x}$;

е) $y = -7x^3 - 13 \operatorname{ctg} x + x - 5$;

ж) $y = 4^x(5x + 7 \ln x)$;

з) $y = \frac{x-9}{\sin x}$;

и) $y = \ln(6x - 3)$;

к) $y = (6x - 9)^{11}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

1) $y = 2x^5 - 5x^2, x_0 = -1$;

2) $y = \frac{x^3}{2}, x_0 = 4$;

3) $x^2 + y = 0, x_0 = -1$;

4) $y = \sqrt{5 - x^2}, x_0 = 2$;

5) $y = \frac{x^2 + 3x}{3}, x_0 = -1$;

6) $y = \sqrt{x} + 2x, x_0 = 9$.

**Содержание практической работы по теме
«Производная. Геометрический смысл производной».**

Вариант 1

1. Найти производную функции:

1) $y = 7x^5 + 5\cos x - \ln x$; 2) $y = \frac{2x+5}{\sin x}$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 2x} - \operatorname{ctg} 3x$; 4) $y = \frac{4 + \ln x^2}{e^{3x}}$;

5) $y = 2^x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{x+7}$

2. Составить уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{x} + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 9$.

Вариант 2

1. Найти производную функции:

1) $y = 7x^7 - 2\sin x + \operatorname{tg} x$; 2) $y = \frac{\sin x}{5x-2}$;

3) $y = x \cdot \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \sqrt{3 + 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$;

5) $y = \frac{1 + \ln x}{1 + \cos 3x}$

2. Составить уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{x} - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: Вычисление дифференциала функций, нахождение дифференциала первого и второго порядка. Механический смысл производной.

Цель: Проверить на практике знание понятия дифференциала функции, умение находить дифференциалы первого и второго порядка, пользуясь правилами дифференцирования.

При выполнении работы необходимо научиться:

- вычислять производные, применяя правила дифференцирования;
- находить дифференциалы первого и второго порядка.

Теоретические сведения к практической работе

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется дифференцированием.

Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Механический смысл производной

Значение средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к некоторому вполне определенному значению, которое называют *мгновенной скоростью* $v(t)$ материальной точки в момент времени t_0 .

Мгновенная скорость $v(t_0)$ определена для любой дифференцируемой функции $x(t)$, при этом

$$v(t) = x'(t)$$

– производная от координат по времени есть скорость.

В этом заключается *механический смысл производной*.

Скорость движения точки есть функция от времени t . А производная этой функции называется ускорением движения:

$$a = v'(t)$$

– производная от скорости по времени есть ускорение.

Пример. Материальная точка движется по закону

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0,$$

где $a \neq 0$, v_0 и x_0 – постоянные. Найти скорость и ускорение движения.

Решение: Скорость этого движения есть первая производная от координат по времени:

$$v = x'(t) = \left(\frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0 \right)' = 2 \frac{a}{2}t + v_0 = at + v_0.$$

Ускорение – это вторая производная от координат по времени:

$$a = x''(t), \text{ т. е. } a = v'(t) = (at + v_0)' = a.$$

Задания по теме «Производные высших порядков.

Механический смысл производной»

Задание 1. Найти производную второго порядка функции $y=f(x)$.

- 1) $y = \ln x + 9$;
- 2) $\cos x - \ln x$;
- 3) $y = \sin x + x^4$;
- 4) $y = x^2 + \sin x$;
- 5) $y = x + \ln x$;
- 6) $3e^x + 2x$.

Задание 2. Найдите скорость и ускорение точки в момент t_0 , если:

- 1) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5, t_0 = 4$;
- 2) $x(t) = 5t - t^2, t_0 = 2$;
- 3) $x(t) = 3 \cos 2t, t_0 = \frac{\pi}{4}$;
- 4) $x(t) = 2t^2 + t - 4, t_0 = 4$.

**Содержание практической работы по теме
«Производные высших порядков.
Механический смысл производной»**

Вариант 1

1. Найти производную второго порядка функции:
1) $y = \ln x + 9$; 2) $y = x^4 + \sin x$;
3) $y = x = \ln x$.
2. Найти скорость и ускорение точки в момент времени t_0 ,
если:
1) $x(t) = 5t - t^2$, $t_0 = 2$;
2) $x(t) = 2t^2 + t - 4$, $t_0 = 4$.

Вариант 2

1. Найти производную второго порядка функции:
1) $y = \cos x - \ln x$; 2) $y = x^2 + \sin x$;
3) $y = 3e^x + 2x$.
2. Найти скорость и ускорение точки в момент времени t_0 ,
если:
1) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$, $t_0 = 4$;
2) $x(t) = 3 \cos 2t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: Нахождение промежутков возрастания (убывания) и точек экстремума. Исследование функции.

Цель: Проверить на практике знание и умение находить промежутки возрастания и убывания, умение находить точки экстремума. Проверить на практике знание и умение применять производную для исследования функций, умение исследовать функцию по общей схеме и строить графики функции.

Теоретические сведения к практической работе

Определение возрастающей функции.

Функция $y=f(x)$ возрастает на интервале X , если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, x_2 > x_1$ выполняется и неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение убывающей функции.

Функция $y=f(x)$ убывает на интервале X , если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Точки экстремума, экстремумы функции.

Точку x_0 называют **точкой максимума** функции $y=f(x)$, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Значение функции в точке максимума называют **максимумом функции** и обозначают $y_{\max}$.

Точку x_0 называют **точкой минимума** функции $y=f(x)$, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Значение функции в точке минимума называют **минимумом функции** и обозначают $y_{\min}$.

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

- Найти область определения функции;
- Найти производную функции;
- решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения;

- к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.

Достаточное условие экстремума.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в ε -окрестности точки x_0 , а в самой точке x_0 непрерывна.

Тогда:

- если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$ то x_0 – точка максимума;
- если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, то x_0 точка минимума.

Другими словами:

- если в точке x_0 функция непрерывна и в ней производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума;
- если в точке x_0 функция непрерывна и в ней производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Алгоритм нахождения точек экстремума по достаточному условию экстремума функции.

- Находим область определения функции.
- Находим производную функции на области определения.
- Определяем нули числителя, нули знаменателя производной и точки области определения, в которых производная не существует (все перечисленные точки называют *точками возможного экстремума*, проходя через эти точки, производная как раз может изменять свой знак).
- Эти точки разбивают область определения функции на промежутки, в которых производная сохраняет знак. Определяем знаки производной на каждом из интервалов (например, вычисляя значение производной функции в любой точке отдельно взятого интервала).
- Выбираем точки, в которых функция непрерывна и, проходя через которые, производная меняет знак – они и являются точками экстремума.

Пример 1: Исследовать на монотонность и экстремум функции $f(x) = \left(8x + \frac{x^4}{4}\right)$.

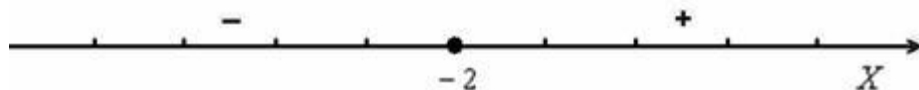
Решение:

- 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.
- 2) Найдём критические точки:

$$f'(x) = \left(8x + \frac{x^4}{4}\right) = 8 + x^3 = 0$$

$x = -2$ – критическая точка.

3) Методом интервалов определим знаки производной:



Ответ: функция убывает на интервале $(-\infty; -2)$ и возрастает на интервале $(-2; +\infty)$. В точке $x = -2$ функция достигает минимума:

$$f(-2) = 8 \cdot (-2) + \frac{(-2)^4}{4} = -16 + 4 = -12$$

Пример 2: Исследовать на монотонность и экстремумы функцию

$$f(x) = \frac{1-x^3}{3x}$$

Решение:

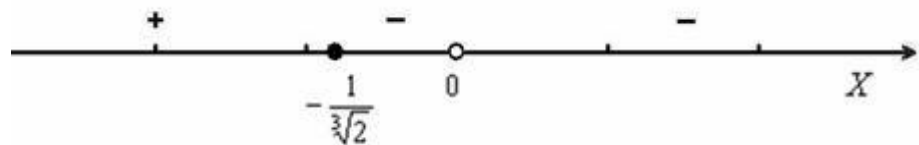
1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=0$.

2) Найдём критические точки:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1-x^3}{3x} \right) = \left(\frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} \right) = -\frac{1}{3x^2} - \frac{2x}{3} = \frac{-1-2x^3}{3x^2} \\ &= -\frac{(1+2x^3)}{3x^2} = 0 \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ – критическая точка.

3) Определим знаки производной:



Ответ: функция возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ и убывает на $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ она достигает

$$\text{ма: } f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}{3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{3} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ и убывает на $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ она достигает макс: $f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}{3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{3} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

Алгоритм исследования функций

1. Найти её область определения. Если это не слишком сложно, то полезно найти также область значений. (Однако, во многих случаях, вопрос нахождения откладывается до нахождения экстремумов функции.)

2. Выяснить общие свойства функции, которые помогут в определении её поведения: не является ли функция чётной либо нечётной, не является ли она периодической.

3. Выяснить, как ведёт себя функция при приближении аргумента к граничным точкам области определения, если такие граничные точки имеются. Если функция имеет точки разрыва, то эти точки тоже проверить на наличие вертикальных асимптот функции. Найти наклонные асимптоты.

4. Найти её область определения. Если это не слишком сложно, то полезно найти также область значений. (Однако, во многих случаях, вопрос нахождения откладывается до нахождения экстремумов функции.)

5. Выяснить общие свойства функции, которые помогут в определении её поведения: не является ли функция чётной либо нечётной, не является ли она периодической.

6. Выяснить, как ведёт себя функция при приближении аргумента к граничным точкам области определения, если такие граничные точки имеются. Если функция имеет точки разрыва, то эти точки тоже проверить на наличие вертикальных асимптот функции. Найти наклонные асимптоты.

7. Найти точки пересечения графика с осями координат, что состоит в простом вычислении значения функции при условии:

С осью ОХ: $y=0$;

С осью ОУ: $x=0$.

Нахождение точек пересечения с осью может привести к необходимости решить сложное алгебраическое уравнение, что, быть мо-

жет, удастся сделать лишь приближённо. Отыскав корни функции и точки разрыва, мы можем определить знак функции на каждом из интервалов между этими точками. Это можно сделать либо вычислив значение функции в какой-нибудь из точек интервала, либо применив метод интервалов.

5. Найти промежутки монотонности. Для этого находят производную и решают неравенство: $f'(x) > 0$.

На промежутках, где это неравенство выполнено, функция возрастает. Там, где выполнено неравенство $f'(x) < 0$, функция убывает.

Найдя интервалы монотонности, мы можем сразу определить точки локального экстремума: там, где возрастание сменяется убыванием, располагаются локальные максимумы, а там, где убывание сменяется возрастанием – локальные минимумы.

6. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости ведётся с помощью второй производной. Найдя $f''(x)$, мы определяем знаки $f''(x)$ на интервалах:

если $f''(x) > 0$, то кривая графика функции вогнута;

если $f''(x) < 0$, то кривая графика функции выпуклая.

Заодно определяем точки перегиба как те точки, в которых функция меняет направление выпуклости (и непрерывна).

7. Нахождение точек пересечения графика с асимптотой и дополнительных точек. Этот пункт не носит обязательного характера, однако нахождение таких точек придаёт исследованию функции и построенному её графику законченность и полноту.

Заметим, что получающиеся в процессе исследования функции точки на осях координат и на графике полезно сразу же наносить на чертёж. Это помогает по ходу дела уяснять вид графика.

Задания по теме

«Нахождение промежутков возрастания (убывания) и точек экстремума. Исследование функции»

Исследовать функцию и построить график:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

2. $y = \frac{5-2x}{x^2-4}$

3. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

$$4. \quad y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$5. \quad y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$$

**Содержание практической работы по теме
«Нахождение промежутков возрастания (убывания)
и точек экстремума. Исследование функции»**

Вариант 1

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке $[-1; 4]$.

3. Исследовать функцию $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$ и построить ее график.

Вариант 2

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 2$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

3. Исследовать функцию $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ и построить ее график.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Интеграл. Методы интегрирования. Неопределенный интеграл.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

При выполнении работы необходимо научиться:

- вычислять неопределенные интегралы различными методами интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a, b) , если $F(x) = f(x)$

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, $C = \text{const}$.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование, является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$; $d \int f(x)dx = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, $k = \text{const}$;
4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 du = C; C = const;$
2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^x du = \frac{u^{x+1}}{x+1} + C, x \neq -1; 3a. \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$
7. $\int \cos u du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u du = -\cos u + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$
11. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C;$
12. $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$
13. $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$
15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
17. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C;$
18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1.

$$a) \int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5 \right) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5 \right) dx =^{(1)} \\ &= \int x dx + \int \sqrt{x} dx - \int 3x^5 dx + \int \frac{2dx}{x^3} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int tg5 dx =^{(2)} \\ &= \int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^5 dx + 2 \int x^{-3} dx \\ &\quad - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + tg5 \int dx =^{(3)} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{1}{6} x^6 + 2 \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot x^{-2} - (-ctgx) + tg5 \cdot x + C =^{(4)} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctgx + tg5 \cdot x + C, \text{ где } C = const \end{aligned}$$

Метод замены переменной*Алгоритм замены переменной:*

- 1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$
- 2) Найти связь между дифференциалами $d_x = \varphi(t)dt$.
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \Psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$a) \int \cos 4x dx; \text{ б) } \int e^{9x+1} dx; \text{ в) } \int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} a) \int \cos 4x dx &= \left| \begin{array}{l} t = 4 \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt \\ &= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int e^{9x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 9x + 1 \\ dt = (9x + 1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \frac{1}{9} \int e^t dt = \frac{1}{9} e^t + C \\ &= \frac{1}{9} e^{9x+1} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int x(2 - x^2)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2 - x^2 \\ dt = (2 - x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{2} \int t^5 dt = -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2 - x^2)^6 + C. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \quad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям*.

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV .

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

$$\text{а) } \int (3x - 1) \sin^2 x dx; \text{ б) } \int (1 + 2x) \ln x dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (3x - 1) \sin^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} U = 3x - 1 \rightarrow dU = 3dx \\ dV = \sin^2 x dx \rightarrow V = -\frac{\cos^2 x}{2} \end{array} \right| = \\ &= (3x - 1) \left(-\frac{\cos^2 x}{2} \right) + \int \frac{\cos^2 x}{2} dx = \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}(3x-1)\cos^2 x + \frac{3}{2} \int \cos^2 x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int (1+2x) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} U = \ln x \rightarrow dU = \frac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \rightarrow \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \\ &= \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2) \frac{dx}{x} = \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \\ &= \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Задания по теме
«Интеграл. Методы интегрирования.
Неопределенный интеграл»

Задание 1. Вычислить интегралы.

- 1) $\int \left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x} \right) dx \int \left(\frac{5}{5x^2+5} + 7^x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) dx$
- 2) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5} \right) dx \int \left(\frac{2}{2x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2} \right) dx$
- 3) $\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x \right) dx \int \left(\frac{12}{3+3x^2} - 3\cos x + \frac{x^2-9}{x-3} \right) dx$
- 4) $\int \left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5} \right) dx \int \left(\frac{6}{2x^2+2} - 2\sin x + 3^x \right) dx$
- 5) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3} \right) dx \int \left(\frac{6}{3x^2-9} + \frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x} \right) dx$
- 6) $\int \left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3} \right) dx \int \left(\frac{16}{2x^2-8} - \frac{3-x^3}{x^4} + 5^x \right) dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

- 1) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x} \int \frac{x dx}{\sqrt{2+x^2}} \int e^{1-3x} dx$
- 2) $\int (2x-1) \cos(x^2-x) dx \int x\sqrt{5+x^2} dx \int e^{6x+5} dx$

- 3) $\int 10^{2x+1} dx \int \sin \frac{x}{2} dx \int \frac{dx}{5x+3}$
- 4) $\int x^2(3-x^3)^{10} dx \int \cos^2 x dx \int e^{\sin x} \cos x dx$
- 5) $\int \frac{xdx}{x \ln x} \int \sin^2 x dx \int 3^{7x-1} dx$
- 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \int \sin(2-3x) dx \int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

- 1) $\int (7x-1) \cos x dx \int \operatorname{arctg} x dx$
- 2) $\int (6-5x)e^x dx \int (7x+5) \ln x dx$
- 3) $\int x \cos x dx \int \operatorname{arccotg} x dx$
- 4) $\int (1+2x) \cos x dx \int \arcsin x dx$
- 5) $\int (8x-1) \sin^5 x dx \int (6+5x) \ln x dx$
- 6) $\int x e^x dx \int (3x+2) \ln x dx$

Содержание практической работы по теме «Интеграл. Методы интегрирования. Неопределенный интеграл»

Вариант 1

1. Вычислить интегралы.

- 1) $\int \left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x} \right) dx$
- 2) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[3]{x^3} \right) dx$

2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

- 1) $\int \sin 2x dx$
- 2) $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

3. Проинтегрировать по частям.

- 1) $\int (6-5x)e^x dx$
- 2) $\int (1+2x) \cos x dx$

Вариант 2

1. Вычислить интегралы.

$$1) \int \left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5} \right) dx$$

$$2) \int \left(\frac{6}{3x^2-9} + \frac{3\sin^3 x - 5}{\sin^2 x} \right) dx$$

2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

$$1) \int e^{6x+5} dx$$

$$2) \int \cos 2x dx$$

3. Проинтегрировать по частям.

$$1) \int (7x-1) \cos x dx$$

$$2) \int (7x+5) \ln x dx$$

Вариант 3

1. Вычислить интегралы.

$$1) \int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x \right) dx$$

$$1) \int \left(\frac{3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3} \right) dx$$

2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

$$1) \int e^{1-3x} dx$$

$$2) \int \sin \frac{x}{2} dx$$

3. Проинтегрировать по частям.

$$1) \int x \cos x dx$$

$$2) \int (6+5x) \ln x dx$$

Вариант 4

1. Вычислить интегралы.

$$1) \int \left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5} \right) dx$$

$$2) \int \left(\frac{16}{2x^2-8} - \frac{3-x^3}{x^4} + 5^x \right) dx$$

2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

$$1) \int \frac{dx}{\sin^2 3x}$$

$$2) \int 10^{2x+1} dx$$

3. Проинтегрировать по частям.

$$1) \int (8x-1) \sin 5x dx$$

$$2) \int x e^x dx$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: Вычисление определенного интеграла.

Цель: Проверить на практике знание понятия определенного интеграла, умение вычислять табличные интегралы, умение вычислять определенный интеграл методом введения новой переменной и по частям.

При выполнении работы необходимо научиться:

■ вычислять неопределенный интеграл методом введения новой переменной и по частям.

Теоретические сведения к практической работе

Таблица неопределенных интегралов.

1	2
$\int x^p \cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$
$\int 0 \cdot dx = C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a} \right + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$	

Определенный интеграл, его свойства и вычисление.

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{a=F(a)-F(b)}^b$$

а и b – соответственно верхний и нижний пределы интегрирования, они пишутся и читаются снизу вверх, а в формулу подставляются сверху вниз!)

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

2. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Пример 1.

$$\int_2^3 3x^2 dx = x^3|_{2=3^3-2^3=27-8=19}^3$$

Пример 2. По формуле Ньютона-Лейбница вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^2 x \cdot e^{x^2+1} dx$.

Решение.

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[-1;2]$, поэтому, интегрируема на нем.

Найдем неопределенный интеграл $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$ методом подведения под знак дифференциала:

$\int x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+1} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$. Так мы получили множество всех первообразных функции $y = x \cdot e^{x^2+1}$ для всех действительных x , следовательно, и для $x \in [-1; 2]$.

Возьмем первообразную при $C=0$ и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x \cdot e^{x^2+1} dx &= \left(\frac{1}{2} e^{x^2+1} \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2} e^{2^2+1} - \frac{1}{2} e^{(-1)^2+1} = \frac{1}{2} (e^5 - e^2) = \frac{1}{2} e^2 (e^3 - 1) \end{aligned}$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Пример 3.

Вычислить значение определенного интеграла $\int_9^{18} \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx$.

Решение.

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке интегрирования, следовательно, определенный интеграл существует.

Обозначим $\sqrt{2x-9} = z \rightarrow x = g(z) = \frac{z^2+9}{2}$.

При $x=9$ имеем $z = \sqrt{2 \cdot 9 - 9} = \sqrt{9} = 3$,

а при $x=18$ имеем $z = \sqrt{2 \cdot 18 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$,

то есть, $g(\alpha) = g(3) = 9$, $g(\beta) = g(3\sqrt{3}) = 18$.

Подставляем полученные результаты в формулу

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(z)) \cdot g'(z) dz :$$

$$\begin{aligned} \int_9^{18} \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx &= \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{z^2+9}{2} \cdot z} \cdot \left(\frac{z^2+9}{2} \right) dz = \\ &= \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{z^2+9}{2} \cdot z} \cdot z dz = \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{2}{z^2+9} dz \end{aligned}$$

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что одной из первообразных функции $\frac{2}{z^2+9}$ является функция $\frac{2}{3} \arctg \frac{z}{3}$, поэтому, по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\begin{aligned} \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{2}{z^2+9} dz &= \left(\frac{2}{3} \arctg \frac{z}{3} \right) \Big|_3^{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \arctg \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} \arctg \frac{3}{3} \\ &= \frac{2}{3} (\arctg \sqrt{3} - \arctg 1) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{18} \end{aligned}$$

Можно было обойтись и без формулы

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(z)) \cdot g'(z) dz.$$

Если методом замены переменной взять неопределенный интеграл $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx$, то мы придем к результату:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

Таким образом, по формуле Ньютона-Лейбница вычисляем определенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_9^{18} \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx &= \left(\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} \right) \Big|_9^{18} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \cdot 18 - 9}}{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \cdot 9 - 9}}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{3} (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{18} \end{aligned}$$

Задания по теме «Вычисление определенного интеграла»

Задание. Вычислите определенный интеграл.

1. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{2+x^3}$
2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$
3. $\int_{-1}^2 (3x^2 + 4x - 1) dx$
4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3+\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$
5. $\int_{-1}^0 (2x + 3)e^{-x} dx$
6. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 - x) \sin 3x dx$

Содержание практической работы по теме «Вычисление определенного интеграла»

Задание. Вычислить определенный интеграл.

$$1) \int_1^2 (x^3 + 10x) dx ;$$

$$2) \int_{-2}^3 (3x^2 + 6x - 2) dx ;$$

$$3) \int_1^3 (x^2 - 16x + 3) dx ;$$

$$4) \int_0^8 (21x - 19) dx ;$$

$$5) \int_{-4}^0 (x^3 + 8) dx ;$$

$$6) \int_{10}^{13} (2x + 7) dx ;$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: Вычисление площади фигур с помощью определенного интеграла.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей.

При выполнении работы необходимо научиться:

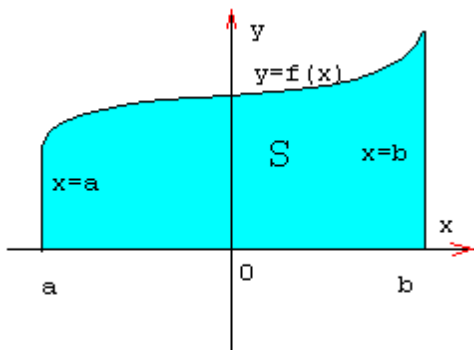
- вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Теоретические сведения к практической работе

Определение

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox , а с боков отрезками прямых $x=a$, $x=b$

Площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определённого интеграла



Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующему плану:

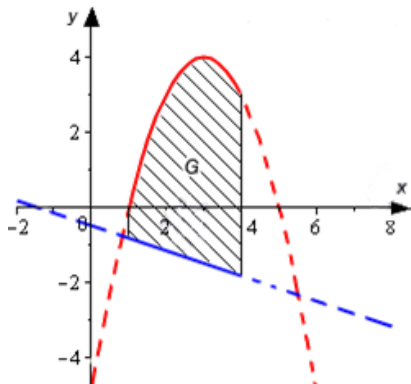
- 1) по условию задачи делают схематический чертёж;
- 2) представляют искомую фигуру как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
- 3) записывают каждую функцию в виде $f(x)$
- 4) вычисляют площадь каждой криволинейной трапеции и искомой фигуры.

Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 6x - 5$ и прямыми $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$, $x=1$, $x=4$.

Решение.

Построим эти линии на плоскости.



Всюду на отрезке $[1;4]$ график параболы $y = -x^2 + 6x - 5$ выше прямой $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$. Поэтому, применяем полученную ранее формулу для площади и вычисляем определенный интеграл

$$\begin{aligned} S(G) &= \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 5 - \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \right) \right) dx = \\ &= \int_1^4 \left(-x^2 + \frac{19}{3}x - \frac{9}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{19}{6}x^2 - \frac{9}{2}x \right) \Big|_1^4 = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + \frac{19}{6} \cdot 4^2 - \frac{9}{2} \cdot 4 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{19}{6} \cdot 1^2 - \frac{9}{2} \cdot 1 \right) \\ &= -\frac{64}{3} + \frac{152}{3} - 18 + \frac{1}{3} - \frac{19}{6} + \frac{9}{2} = 13 \end{aligned}$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

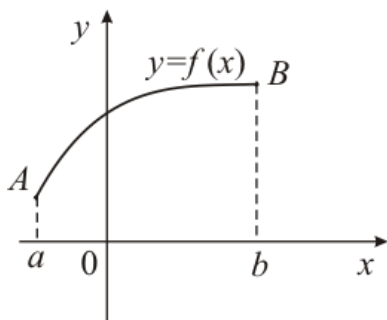


Рисунок 1.

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги AB (рис. 1) этой кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$\int AB = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$;

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y=f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой длины дуги. Найдем y' : $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в формулу:

$$\begin{aligned} \int AB &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4} dx, dx = \frac{4}{9} dt, \\ x = 0 \rightarrow t = 1, \\ x = 1 \rightarrow t = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4^{13}}{9} \int_1^{13,4} t^{\frac{1}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{4}{9} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^{13,4} = \\
&= \frac{8}{27} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{13,4} = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{13 \sqrt{13}}{8} - 1 \right) \approx \\
&\approx 1,440 \text{ (единиц длины)}.
\end{aligned}$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 2), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (12)$$

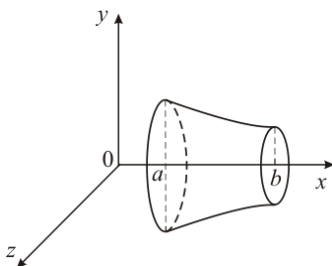


Рисунок 2.

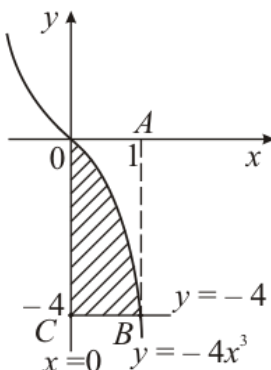


Рисунок 3.

Пример 3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3, x = 0, y = -4$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 3).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB . Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2 :

$$V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^3)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической работы **«Вычисление площади фигур с помощью** **определенного интеграла»**

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox ;

б) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox .

2. Найти длину дуги кривой.

$$y = 1 + \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

$$x^2 - y = 0, \quad y = 1$$

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) параболой $y = 4 - x^2$ и осью Ox ;

б) графиком функции $y = 6$, прямой $y = x + 2$ и прямыми $x = 0, x = 4$.

2. Найти длину дуги кривой.

$$y = x^{\frac{2}{3}} + 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

$$y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далее, b_{ij} – обозначение элемента, стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i -ю строку матрицы A используют обозначение A_i , при ссылке на j -й столбец – обозначение A^j .

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} квадратной матрицы A (размера $n \times n$) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной*. Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A , B называются **равными** ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти сумму матриц A , B одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 1. Найти $2A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Имеем: } \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1(4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера $m \times n$ и B размера $n \times p$, при этом $AB=C$, матрица C имеет размер $m \times p$, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B : $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, p$).

Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Размер матрицы A 3×2 , матрицы B 2×2 . Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2,4) \\ (0;4)(1,3) & (0;4)(-2,4) \\ (2;1)(1,3) & (2;1)(-2,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, называется матрица A^T размера $n \times m$, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

$$\text{Например, если } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то } C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Вычисление определителей. **Определитель** матрицы A размера 2×2 (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы A размера 3×3 (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу «*раскрытие определителя по первой строке*»:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Задания по теме «Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы»

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

$$1) 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T;$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T;$$

$$7) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Доказать равенство $(AB)C=A(BC)$ для матриц:

$$1) A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{Задание 3. Найти: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2; 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3; 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3.$$

Задание 4. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad 5) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Содержание практической работы по теме «Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы»

Вариант 1

1. Выполните арифметические действия с матрицами:

1) $3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

2. Докажите равенство $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Вариант 2

1. Выполните арифметические действия с матрицами:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T;$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

2. Докажите равенство $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители:

$$1) \begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения.

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретические сведения к практической работе

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффици-

ентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – $m \times n$),

а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ (m -мерный) – столбцом (вектором) свободных чле-

нов. Матрицу вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$ называют расши-

ренной матрицей системы (*). Любой набор значений неизвестных

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \text{ образующих } n\text{-мерный вектор } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ при каждом $i=1, 2, \dots, m$ (i -е уравнение представляет собой скалярное произведение i -й строки матрицы системы на вектор X), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Классификация систем линейных алгебраических уравнений.

Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется **совместной** (соответственно, система **несовместная**, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть **приведенной** (а саму систему **канонической**), если в каждой i -й строке ($i=1, 2, \dots, m$) есть элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные элементы j -го столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть **ведущими**, а оставшиеся неизвестные назовем **свободными**.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т. е. выполняется равенство $r(A) = r(A|B)$.

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем **рангом системы**.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы*.

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход*. Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т. е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 1. Решить СЛАУ
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 + 4C_1 \\ C_3 = C_3 - 2C_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Оче-

видно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 4 \\ 11 & 0 & -6 & | & 27 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 - 11C_3 \\ C_1 = C_1 - 2C_3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -6 & | & -6 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{C_1 = C_1 - C_2 / 6 \\ C_2 = -C_2 / 6}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$

и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X = (3; 1; 1)^T$. Это и есть ответ.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены i -го столбца на столбец свободных членов.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец сво-

бодных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем опре-

делители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 - 4) - (-1)(12 + 16) - 1(-6 - 12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16 - 4) - (-1)(44 + 22) - 1(-22 - 44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44 + 22) - 4(12 + 6) - 1(33 - 33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44 + 22) - (-1)(33 - 33) + 4(-6 - 12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3$; $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$;

$x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$. Для проверки результата подставим полученные

значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$,

$3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Задания по теме
«Системы линейных алгебраических уравнений
и методы их решения»

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

$$1) (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

$$2) (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array} \right)$$

$$3) (A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$4) (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$$

Содержание практической работы по теме «Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения»

Вариант 1

1. Запишите систему линейных уравнений по расширенной матрице:

$$1) A/B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{pmatrix};$$

$$2) A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Решите системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Решите системы уравнений (в случае неопределенной системы выписать общее и два любых частных решения):

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 4x_3 = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Запишите систему линейных уравнений по расширенной матрице:

$$1) A/B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{pmatrix};$$

$$2) \ A/B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Решите системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 6x_3 = 13. \end{cases}$$

3. Решите системы уравнений (в случае неопределенной системы выписать общее и два любых частных решения):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 4x_3 = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: Комплексные числа и действия с ними.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

Теоретические сведения к практической работе

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где x, y – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, x , называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, y , – *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения:
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; x_2 = 3 - 3i$$

Справедливы следующие **правила арифметических действий над комплексными числами** $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2)

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

$$3) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_2 z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

(эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \frac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

$$\text{поэтому } \operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}, \operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку $M(x; y)$ на декартовой плоскости (при этом на оси OX располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси OY – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки M), т. е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX . Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$. При этом выражение вида

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.2)$$

называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad (1.3.)$$

Пример 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z = 1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для оп-

ределения аргумента воспользуемся формулой:
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Получаем, что $\varphi = \arg z = \frac{5\pi}{3}$. Тригонометрическая форма заданного

комплексного числа имеет вид: $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.4)$$

Для извлечения корня n -й степени (n – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (1.5)$$

Пример 4. Вычислить: а) $(-1+i)^{13}$; б) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании а), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos \varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$, т. е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2}^{13} \left(\cos \frac{3 \cdot 13\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 13\pi}{4} \right)$ (в силу (1.4)). Учитывая что $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 64\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 64 - 64i.$$

В задании б) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Формы комплексного числа

1. Алгебраическая $z = a + bi$

сложение: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

умножение: $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i - b_1 b_2$

деление: $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$

2. Тригонометрическая $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

умножение: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

возведение в степень: $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

извлечение корня: $z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right),$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

3. Показательная $z = r \cdot e^{i\varphi}$

умножение: $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

деление: $\frac{z_1}{z_2} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

возведение в степень: $z^n = e^{in\varphi}$

Задания по теме «Комплексные числа и действия с ними»

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2 - 3i) - (1 + i)(2i - 1)$

2) $\frac{2 + 3i}{1 - i}$

3) $6i + \frac{1 + 7i}{2 - 3i}$

4) $(3 + i) \frac{1 + i}{1 - i}$

5) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^2}{i - \sqrt{3}}$

$$6) (1+2i)^3 - 3$$

$$7) (1-i)^2 + i^4$$

Задание 2. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $-3i$; 2) $2+i$; 3) $3+3i$; 4) $2-5i$; 5) $7+8i$; 6) $10-5i$; 7) $2-4i$.

Задание 3. Найти все корни уравнений:

$$1) x^2 + 9 = 0;$$

$$2) x^2 - 3x + 10 = 0;$$

$$4) x^2 - 2x + 10 = 0;$$

$$5) x^2 + 2x + 10 = 0;$$

$$6) x^4 - 16 = 0 \quad 7) x^2 + 100 = 0$$

Содержание практической работы по теме «Комплексные числа и действия с ними»

Вариант 1	Вариант 2
1. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - 8i$	1. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -4 + 2i$
2. Найдите модуль к.ч. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$	2. Найдите модуль к.ч. $z = 3 - 4\sqrt{5}i$
3. Найдите $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 6 - 2i$, $z_2 = 3 - 4i$	3. Найдите $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + i$
4. Изобразите число на комплексной плоскости $z = 2 + 4i$	4. Изобразите число на комплексной плоскости $z = -3 + 4i$
5. Вычислите: $(-5x + 4y^2i) \cdot (5x - 4y^2i)$	5. Вычислите: $(6x^3 + yi) \cdot (-6x^3 + yi)$
6. Разложите на множители: а) $x^2 + 1$; б) $25x^2 + 9y^2$	6. Разложите на множители: а) $x^2 + y^2$; б) $16x^2 + 9y^2$
7. Решите уравнения: а) $x^2 + x + 1 = 0$; б) $x^2 + 2x + 2 = 0$	7. Решите уравнения: а) $5x^2 = 7x + 3 = 0$; б) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

8. Выполнить умножение, деление и возведение в степень к. ч. $(z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^2, z_2^3)$, если а) $z_1 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$, $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ б) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$	Выполните умножение, деление и возведение в степень к. ч. $(z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^2, z_2^3)$, если а) $z_1 = 3(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$, $z_2 = 2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$ б) $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$
9. Запишите в тригонометрической и показательной форме к. ч. а) $z = \sqrt{3} + i$; б) $z = -1 + i$	9. Запишите в тригонометрической и показательной форме к. ч. а) $z = \sqrt{3} - i$; б) $z = 1 - i$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: Решение задач на вероятность событий.

Цель: способствовать усвоению определения вероятности, правила сложения и умножения вероятностей. Выработать практические умения решать прикладные задачи на сложение и умножение вероятностей, уметь рассчитывать вероятность событий

При выполнении работы необходимо научиться:

- решать задачи на нахождение вероятностей.

Теоретические сведения к практической работе

Изучение явлений связано с выполнением некоторых условий, или испытаний. Всякий результата или исход испытания называется событием. События А, В называются **несовместимыми**, если в условиях испытаний каждый раз возможно появление только одного события.

События А и В называются **совместимыми**, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

Событие называется **случайным**, если исход испытания приводит либо к появлению, либо к не появлению этого события. М – число появления некоторого события; N- число испытаний.

Вероятность – мера объективной возможности появления события. За появление события принимается величина, около которой группируются наблюдаемые значения частоты.

Под вероятностью $P(A)$ наступления события принимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к числу исходов испытания. Вероятность – устойчивая частость. $P(A)=100\%$

Теорема сложения вероятностей. Вероятность наступления одного из нескольких несовместимых событий без указания какого именно, равно сумме вероятностей этих событий.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности наступления первого события на условную вероятность наступления второго события, вычисленную в предположении, что первое событие имеет место.

Пример 1. В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Вероятность невозможного события равна нулю $P=0$.

Вероятность достоверного события равна единице $P=1$.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0 < P(A) < 1$.

Пример 2. Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность

$$P = \frac{11}{34}$$

Пример 3. Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: т. к. события совместны, то

$$p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: $P(AB) = P(A) \cdot P(A/B)$ или $P(BA) = P(A) \cdot P(B/A)$

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей сомножителей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий $H_1, H_2, \dots$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p\left(\frac{A}{H_2}\right) + p(H_2) \cdot p\left(\frac{A}{H_2}\right) + \dots$$

Эта формула называется **формулой полной вероятности**.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(A) \neq 0$, то выполняется равенство, **называемое формулой Байеса**:

$$p(H/A) = \frac{p(H) \cdot p(A/H)}{p(A)}$$

Пример 1. В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие A – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности:

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(H_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(H_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p\left(\frac{A}{H_1}\right) = 0,7$$

$$p\left(\frac{A}{H_2}\right) = 0,8$$

$$p\left(\frac{A}{H_3}\right) = 0,9$$

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) \\ = 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(H/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,83} = 0,169$$

Формула Бернулли

1. Вероятность того, что событие A наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n$$

Пример 1. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p = 0,2$$

$$n = 6$$

$$m = 2$$

$$P(m) = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m} = C_6^2 \cdot 0,2^2 (1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4! 2!} \cdot 0,4 \cdot 0,8^4 = 0,246$$

2. Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(m \geq 1) = 1 - q, q = 1 - p$

Пример 2. Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$$p = 0,6 \Rightarrow q = 0,4$$

$$n = 6$$

$$m \geq 1$$

$$P_k(m \geq 1) = 1 - 0,4^k = 0,9959$$

3. Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле

$$p_k(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{k=1}^n p_k(m)$$

Пример 3. Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$$p = 0,7$$

$$n = 5$$

$$2 \leq m \leq 4$$

$$P = C_4^2 \cdot 0,7^2 \cdot (1 - 0,7)^{4-2} + C_4^3 \cdot 0,7^3 \cdot (1 - 0,7)^{4-3} + C_4^4 \cdot 0,7^4 \cdot (1 - 0,7)^{4-4}$$

Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события

А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

$$np - |1 - p| \leq m_0 \leq np + p$$

Пример 4. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$$p = 0,05$$

$$n = 50$$

$$m_1 - ?$$

$$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$50 \cdot 0,05 - 0,95 \leq m_1 \leq 50 \cdot 0,05 + 0,05$$

$$1,55 \leq m_1 \leq 2,55$$

$$m_1 = 2$$

Задания по теме

«Решение задач на вероятность событий»

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар;

белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующую задачу:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Содержание практической работы по теме «Решение задач на вероятность событий»

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1) Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадет стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

2) В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующую задачу:

Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру $=0,4$, ко второму $=0,6$. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером $=0,94$, а вторым $=0,92$. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1) Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время T равна $0,5$. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время T прибор будет работать безотказно?

2) Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна $0,8$. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

Вариант 2

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1) В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

2) Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующую задачу:

Имеется два одинаковых набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна $0,9$, а второго – $0,8$. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1) Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $=0,3$. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

2) Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна $0,6$.

Вариант 3

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1) Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна $0,9$, во второе – $0,7$, в третье – $0,85$. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

2) Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующую задачу:

Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1) Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна $0,04$. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

2) На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна $p=0,9$. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

Вариант 4.

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1) В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару.

а) Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

б) Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

2) Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующую задачу:

Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1) Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,75. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наимвероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

2) Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. 3-е изд. – М., 2017.-256 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник / А.А. Дадаян. – 3-е изд., испр. И доп.– М.: ИНФРА-М, 2020. – 544 с.- (Среднее профессиональное образование).
3. Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие/ А.А. Дадаян. – 3-е изд.- М.: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2018. – 352 с. – (Профессиональное образование).

Микова Светлана Валерьевна

ЕН.01. МАТЕМАТИКА

Методические указания для выполнения
практической работы студентов СПО

Сверстано и отпечатано в филиале КузГТУ в г. Прокопьевске
653039, г. Прокопьевск, ул. Ногрaдская, 19a

Формат 60x90/16. Объем 4,55 п. л. Заказ 354.