МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составитель
Е. Н. Грибанов

МАТЕМАТИКА: ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методические материалы

Рекомендованы учебно-методической комиссией направления
подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе
всех форм обучения

Кемерово 2018

Рецензенты

Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Е. А. – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой математики Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева

Грибанов Евгений Николаевич

Математика: Векторная алгебра: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направлений бакалавриата и всех специальностей всех форм обучения / сост. Е. Н. Грибанов; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», «Линейная алгебра».

Назначение издания – помочь студентам в получении знаний по разделу «Математика: Векторная алгебра» и в организации самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математика: Векторная алгебра».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Основные определения.

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$

Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны. Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули. Всякие векторы можно привести к общему началу, т. е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число. Суммой векторов является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение – $\vec{b} = \alpha\vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т. е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$. Если же только при всех $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\vec{a}_i$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы в трехмерном пространстве.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Если точка $M(x;y;z)$ делит отрезок AB в соотношении λ, то есть $\frac{|AM|}{|MB|}=\lambda$, то координаты этой точки определяются как: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; z=\frac{z\ +\lambda z_2}{1+\lambda}$. В частном случае координаты середины отрезка находятся как: $x=\frac{x_1+x_2}{2}; y=\frac{y_1+y_2}{2}; z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\angle\vec{a},\vec{b}\right)$. Обозначается: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. Для любых трех векторов выполнено равенство $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. Если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ то вектора перпендикулярны (Нулевой вектор перпендикулярен любому вектору);
4. Если вектора заданы в координатной форме $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ то их скалярное произведение находится по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;
5. Длина вектора равна $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$;
6. Угол между векторами находится по формуле

$$\cos\left(\angle\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}=\{3;4;5\}$ и $\vec{b}=\{1;0;1\}$.

Решение: $\cos\alpha=\frac{3\cdot1+4\cdot0+5\cdot1}{\sqrt{9+16+25}\sqrt{1+1}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

Векторное произведение векторов.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ удовлетворяющий следующим условиям: 1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$; 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 3) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов. Обозначается: $\vec{a}\times\vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
2. Для любых трех векторов выполнено равенство $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

3. Если $\vec{a}\times\vec{b}=0$ то вектора параллельны (Нулевой вектор параллелен любому вектору);

4. Если вектора заданы в координатной форме $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ то их векторное произведение находится по формуле $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$;

5. Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\{2;5;1\}$ и $\vec{b}=\{3;1;2\}$.

Решение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}(10-1)-\vec{j}(4-3)+\vec{k}(2-15)=9\vec{i}-\vec{j}-13\vec{k}=\{9;-1;-13\}.$$

Смешанное произведение.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение равно нулю, если: 1) хоть один из векторов равен нулю; 2) два из векторов коллинеарны; 3) векторы компланарны.
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
3. Если вектора заданы в координатной форме $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$ то смешанное произведение находится по формуле $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.
4. Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен $V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

Решение: Найдем вектора $\overrightarrow{BA}=\{-2;-3;-4\}$, $\overrightarrow{BC}=\{4;-1;-2\}$, $\overrightarrow{BD}=\{1;4;-3\}$. Объем пирамиды равен

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 4 & -1 & -2\\ 1 & 4 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-2(3+8)+3(-12+2)-4(16+1)\right|=\frac{1}{6}\left|-120\right|=20$$, найдем площадь грани BCD

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & -2\\ 1 & 4 & -3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\vec{i}(3+8)-\vec{j}(-12+2)+\vec{k}(16+1)\right|=\frac{1}{2}\left|11\vec{i}+10\vec{j}+17\vec{k}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\frac{1}{2}\sqrt{510}$$

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot 20}{\frac{1}{2}\sqrt{510}}=\frac{120}{\sqrt{510}}$$

Практические занятия и самостоятельная работа студентов

Тема Векторная алгебра
1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Длина (норма) вектора и отрезка, направляющие косинусы, нормированный вектор

Практическое занятие

1. $\overline{AD}, \overline{BE}$ и $\overline{CF}$ – медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=0$.

2. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overline{AB}=\vec{a}, \quad \overline{AD}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$ где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

3. M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$.

4. Разложить вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трём некомпланарным векторам: $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}, \quad \vec{r}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

5. Разложить вектор $\vec{d}=\{4;8;5\}$ по трём некомпланарным векторам: $\vec{a}=\{1;2;0\}$, $\vec{b}=\{1;3;1\}$, $\vec{c}=\{1;0;1\}$

6. Заданы векторы $\vec{a}_1=\{-1,2,0\}, \quad \vec{a}_2=\{3,1,1\}, \quad \vec{a}_3=\{2,0,1\}$ и $\vec{a}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2+\frac{1}{3}\vec{a}_3$. Вычислить: а) $|\vec{a}_1|$ и координаты орта $(\vec{a}_1)_0$ вектора $\vec{a}_1$; б) $\cos\left(\widehat{\vec{a}_1, \vec{j}}\right)$; в) координату X вектора $\vec{a}$.

7. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{p}=3\vec{a}-5\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}=4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}, \quad \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \quad \vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

8. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 4. Принимая за начало координат вершину A, и полагая $\overrightarrow{AD} = \{8;0\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{3;5\}$, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения диагоналей.

Самостоятельная работа

1. Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

2. Даны три вершины $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ и $C(1,2,-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвёртую вершину D, противоположную B.

3. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2,6)$, $B(2,8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2,2)$. Найти две другие вершины.

4. Даны вершины треугольника $A(3,-1,5)$, $B(4,2,-5)$ и $C(-4,0,3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

5. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2,0,2)$ и $D(5,-2,0)$ разделён на три равные части.

6. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{v} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

7. Разложить вектор $\vec{d} = \{1;0;5\}$ по трём некомпланарным векторам: $\vec{a} = \{2;3;-2\}$, $\vec{b} = \{1;1;-1\}$, $\vec{c} = \{3;-4;1\}$.

8. Разложить вектор $\vec{d} = \{7;3;6\}$ по трём некомпланарным векторам: $\vec{a} = \{5;-3;-4\}$, $\vec{b} = \{2;1;-3\}$, $\vec{c} = \{3;-6;1\}$.

9. Даны вершины треугольника $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ и $C(-5,2,-6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

10. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Положим за начало координат вершину A и полагая $\overrightarrow{AB} = \{3;0;0\}$, $\overrightarrow{AD} = \{0;4;0\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{0;0;6\}$, найти координаты: 1) вершин C, B_1, C_1; 2) точек K и L середины ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно; 3) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABA_1B_1; 4) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в базисе образованном векторами $\overrightarrow{AB} = \{6;8\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{8;-6\}$.

12. В тетраэдре $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q середины ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC соответственно, S – точка пересечения медиан треугольника ABC. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, найти в этом базисе координаты векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{KQ}$, $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{KS}$.

13. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина средней линии равна полусумме длин оснований.

14. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что если $|EF| = \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$, то $ABCD$ – трапеция.

15. Доказать, что если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

16. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 3:1, считая от вершины.

2. *Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности векторов.*

Практическое занятие

1. Дано $|\vec{a}_1|=3,\ |\vec{a}_2|=4,\ \angle(a_1,a_2)=2\pi/3$. Вычислить: а) $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$; б) $(3\vec{a}_1-2\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_1+2\vec{a}_2)$.

2. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q},\ \vec{b}=5\vec{p}+2\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2},\ |\vec{q}|=3$ и $\angle(\vec{p},\vec{q})=\pi/4$.

3. Определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=20$ и $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2$.

4. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=2\pi/3$.

5. Зная, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=4$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, вычислить $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$.

6. Даны векторы $\vec{a}=\{4,-2,-4\}$ и $\vec{b}=\{6,-3,2\}$. Вычислить: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; в) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(a-\vec{b})$; г) $|2\vec{a}-\vec{b}|$; д) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$; е) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$; ж) направляющие косинусы вектора $\vec{a}$; з) $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{a}-2\vec{b})$; и) $\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))$.

7. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ и $C(3,-2,1)$.

8. Доказать, что четырёхугольник с вершинами $A(-3,5,6)$, $B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$ и $D(4,7,-2)$ – квадрат.

9. Найти косинус угла φ между диагоналями (AC) и (BD) параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2,1,3)$, $B(5,2,-1)$ и $C(-3,3,-3)$.

Самостоятельная работа

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45^o$; 2) $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=7$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120^o$; 3) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=90^o$.

2. Найти $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ если: 1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^o$; 2) если: 1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=150^o$.

3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}=\{3;2;-5\}$, $\vec{b}=\{10;1;2\}$; 2) $\vec{a}=\{1;0;3\}$, $\vec{b}=\{-4;5;2\}$; 3) $\vec{a}=\{2;1;5\}$, $\vec{b}=\{7;-9;-1\}$.

4. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}=\{1;-1;1\}$, $\vec{b}=\{5;1;1\}$; 2) $\vec{a}=\{1;-1;1\}$, $\vec{b}=\{-2;2;-2\}$; 3) $\vec{a}=\{1;-1;1\}$, $\vec{b}=\{3;-3;3\}$.

5. Даны три вектора: $\vec{a}=\{-1;2\}$, $\vec{b}=\{5;1\}$, $\vec{c}=\{4;-2\}$. Вычислить: 1) $\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}$; 3) $\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot(\vec{a}+3\vec{c})$.

6. Доказать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ взаимно перпендикулярны.

7. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такие, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

8. В треугольнике ABC даны длины сторон. Найти скалярное произведение $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$, если: 1) $|AB|=5,\quad |BC|=3,\quad |AC|=4$;
2) $|AB|=7,\quad |BC|=4,\quad |AC|=5$; 3) $|AB|=3,\quad |BC|=2,\quad |AC|=3$.

9. Из одной точки отложены три вектора $\vec{a}=\{0;-3;4\}$, $\vec{b}=\{4;1;-8\}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ имеет длину 1 и делит пополам угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислить координаты вектора $\vec{c}$.

10. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;1\}$ на вектор $\vec{b}=\{1;-3\}$.

11. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;1\}$ на вектор $\vec{b}=\{1;-1\}$.

12. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;-1;2\}$ на вектор $\vec{b}=\{2;-2;4\}$.

13. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;-1;2\}$ на вектор $\vec{b}=\{1;1;2\}$.

14. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;-1;2\}$ на вектор $\vec{b}=\{4;0;-2\}$.

15. Даны два вектора $\vec{a}=\{3;-1\}$ и $\vec{b}=\{-1;1\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $\vec{x}\cdot\vec{a}=13$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-3$.

16. Даны три вектора $\vec{a}=\{4;1;5\}$, $\vec{b}=\{0;5;2\}$ и $\vec{c}=\{-6;2;3\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $\vec{x}\cdot\vec{a}=18$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=1$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=1$.

17. В параллелограмме $ABCD$ точки K и L - середины сторон BC и CD. Найти $|AD|$, если $|AK|=6$, $|AL|=3$, а угол $\angle KAL=\pi/3$.

3. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл. Условие коллинеарности двух векторов. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.

Практическое занятие

1. Дано $|\vec{a}_1|=1,\quad |\vec{a}_2|=2$ и $\angle(\vec{a}_1,a_2)=2\pi/3$. Вычислить: а) $|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|$;
б) $|(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times(\vec{a}_1+2\vec{a}_2)|$; в) $|(\vec{a}_1+3\vec{a}_2)\times(3\vec{a}_1-\vec{a}_2)|$.

2. Дано $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны условием $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Доказать, что $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

4. Заданы векторы $\vec{a}_1=\{3,-1,2\}$ и $\vec{a}_2=\{1,2,-1\}$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$; б) $(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{a}_2$; в) $(2\vec{a}_1-\vec{a}_2)\times(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)$.

5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$.

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

7. Задана пирамида координатами вершин $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(4;4;0)$, $D(0;4;0)$ и $S(2;2;4)$. Точки K и L середины ребер AS и BS соответственно. Найти площадь четырехугольника $CDKL$.

8. Заданы три вектора $\vec{a}=\{1,-1,3\}, \vec{b}=\{-2,2,1\}$ и $\vec{c}=\{3,-2,5\}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

9. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})\cdot(4\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c})=0$.

10. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;3)$, $D(3;4;-3)$ вычислить высоту $h=\left|\overrightarrow{DE}\right|$.

Самостоятельная работа

1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: 1) $\vec{a}=\{3;-1;2\}, \quad \vec{b}=\{2;-3;-5\}$; 2) $\vec{a}=\{2;-1;1\}, \quad \vec{b}=\{-4;2;-2\}$; 3) $\vec{a}=\{6;1;0\}, \quad \vec{b}=\{3;-2;0\}$.

2. Дано $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(a,b)=150^0$. Вычислить: 1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; 2) $\left|(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})\right|$, 3) $\left|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\right|$.

3. На векторах $\vec{a}=\{2;3;1\}$ и $\vec{b}=\{-1;1;2\}$, отложенных из одной точки построен треугольник. Найти: 1) площадь этого треугольника; 2) длины его высот.

4. Треугольник задан координатами вершин $A(1;1;0), B(4;32)$ и $C(2;3;1)$. Вычислить его площадь.

5. Длины базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 3 и 2, а угол между ними равен 30°. В этой системе координат даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма: $A(1;3)$, $B(1;0)$ и $C(-1;2)$. Найти площадь параллелограмма.

6. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, равна $3/4$ площади треугольника ABC.

7. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если длина высоты ее равна h.

8. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(1;1), B(-1;2), C(-3;-2)$ и $D(4;-5)$.

9. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, заданных своими координатами: 1) $\vec{a}=\{1;-1;1\}$, $\vec{b}=\{7;3;-5\}$, $\vec{c}=\{-2;2;-2\}$; 2) $\vec{a}=\{3;5;1\}$, $\vec{b}=\{4;0;-1\}$, $\vec{c}=\{2;1;1\}$; 3) $\vec{a}=\{2;1;0\}$, $\vec{b}=\{3;4;-1\}$, $\vec{c}=\{-1;-3;1\}$; 4) $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{5;-2;1\}$, $\vec{c}=\{2;1;2\}$.

10. Проверить компланарны векторы $\vec{a}=\{2;3;5\}$, $\vec{b}=\{7;1;-1\}$, $\vec{c}=\{3;-5;-11\}$.

11. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}$, $4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}$, $7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$?

12. Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках $A(2,-3,5)$, $B(0,2,1)$, $C(-2,-2,3)$ и $D(3,2,4)$.

13. Найти координаты четвёртой вершины тетраэдра *ABCD*, если известно, что она лежит на оси *Oy*, а объём равен 29. остальные вершины пирамиды находятся в точках $A(-1;10;0)$, $B(0;5;2)$, $C(6;32;2)$.

14. Точка M – середина бокового ребра AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые BD, MD и A_1C попарно перпендикулярны. Известны длины отрезков: $|BD| = 2a$, $|A_1C| = 4a$, $|BC| = {}^{3a}\!/_{2}$. Найти длину высоты этого параллелепипеда.

Самостоятельная работа студентов

Студенты обязаны в объеме часов отпущенных на самостоятельную работу при изучении данной дисциплины выполнять следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и изучение теоретического материала по учебникам, пособиям и конспектам лекций;
- решение заданий по темам практических занятий;
- подготовка к промежуточному контролю.

К экзамену/зачету необходимо выполнить все виды работ.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения раздела «Математика: векторная алгебра»:

Основная литература

1. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 688 с. http://e.lanbook.com/book/281

2. Математический анализ [Текст]: учебное пособие для студентов технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика» и «Математический анализ» / В. А. Гоголин, И. А. Ермакова ; ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева», Каф. математики. – Кемерово, 2016. – 114 с. http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=91479&type=utchposob:common

3. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2010. – 479 с.

Дополнительная литература

4. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва: ОНИКС, 2007. – 304 с.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС 21 век, 2005. – 304 с.

7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. [Текст] Ч. 1 : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС 21 век, 2003. – 304 с.